Fachbereich Mathematik und Statistik
der Universität Konstanz
Merlin Carl

WS 15/16
26.01.2016
Aufgaben zur Kombinatorik

Aufgaben zur Kombinatorik

Aufgabe 1: Bestimme die Summe $S_n = \Sigma_{i=0}^{n} \Sigma_{j=0}^{i} \binom{n}{i} \binom{i}{j}$.

Aufgabe 2: Bestimme (mit Beweis) die Anzahl der Paare (A, B) mit $A \subseteq B \subseteq \{1, 2, ..., n\}$ in Abhängigkeit von n.

Aufgabe 3: Für $n \in \mathbb{N}$ bezeichnen wir mit $t(n)$ die Anzahl der Teiler von n; es ist also z.B. $t(1) = 1$, $t(4) = 3$ und $t(5) = 2$. Wir betrachten nun zu jedem $n \in \mathbb{N}$ die Zahl $T(n) = \frac{\Sigma_{i=1}^{n} t(i)}{n}$, also die durchschnittliche Anzahl von Teilern einer natürlichen Zahl $\leq n$.

(a) Zeige: Für alle $n \in \mathbb{N}$ ist $\Sigma_{i=1}^{n} t(i) = \Sigma_{i=1}^{n} \lfloor \frac{n}{i} \rfloor$.

Mit $H(n) := \Sigma_{i=1}^{n} \frac{1}{n}$ bezeichnen wir nun die n-ten Anfangssumme der harmonischen Reihe.

(b) Folgere: Für alle $n \in \mathbb{N}$ ist $|T(n) - H(n)| \leq 1$.

Bemerkung: Für große n ist $H(n) \approx \ln(n)$, der natürliche Logarithmus von n. Die durchschnittliche Teilerzahl einer natürlichen Zahl $\leq n$ ist also ungefähr $\ln(n)$.

Abgabe am 02.02.2016 im Seminar.