

Aufgaben zur linearen Algebra und Analysis

Aufgabe 1: Es sei $n \in \mathbb{N}$ und A eine $n \times n$ -Matrix mit Einträgen in $\{-1, 1\} \subseteq \mathbb{Z}$. Zeige: $\det(A)$ ist eine ganze Zahl, die von 2^{n-1} geteilt wird.

Aufgabe 2: Es sei K ein endlicher Körper, $n \in \mathbb{N}$, $A \in K^{n \times n}$ invertierbar. Zeige: Es existiert ein $n \in \mathbb{N}$ so, dass $A^n = I_n$.

Aufgabe 3: Es seien $k < n$ natürliche Zahlen. Zeige:

$$\det \begin{pmatrix} \binom{m}{0} & \binom{m}{1} & \cdots & \binom{m}{k} \\ \binom{n+k}{0} & \binom{n+k+1}{1} & \cdots & \binom{n+k}{k} \end{pmatrix} = 1.$$

Aufgabe 4: Bestimme den Grenzwert $\lim_{n \rightarrow \infty} (\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n})$.

Aufgabe 5: Bestimme (mit Beweis) alle reellen Polynome $P \in \mathbb{R}[X]$ so, dass $(x+1)P(x) = (x-10)P(x+1)$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

Aufgabe 6: Es sei $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig. Ferner nehme f keinen Wert mehr als zweimal an. Zeige, dass es einen Wert gibt, den f genau einmal annimmt.

Keine Abgabe.