Freiwilliger Selbsttest

Die Bearbeitung ist freiwillig, es gibt weder Punkte noch eine Note und auch keine Abgabe. Die Aufgaben sollen Ihnen helfen, Ihre Beherrschung von Problemlösestrategien nach Abschluss des Seminars einzuschätzen und damit ermöglichen, Ihren Lernfortschritt zu überprüfen. Wenn Sie eine Rückmeldung wünschen, können Sie Ihre Antworten - wenn Sie möchten auch unter einem Pseudonym - bei mir abgeben.

Aufgabe 1: Es seien m rote und m grüne Punkte in der Ebene gegeben. Zeige, dass man Verbindungslinien zwischen den Punkten ziehen kann, so dass jeder rote Punkt mit genau einem grünen Punkt und jeder grüne Punkt mit genau einem roten Punkt verbunden ist und so, dass die Verbindungslinien sich nicht schneiden.

Aufgabe 2: Es seien $a_0, a_1 \in \mathbb{N}$ beliebig. Eine Folge $(a_i : i \in \mathbb{N})$ natürlicher Zahlen sei nun definiert durch die Vorschrift, dass für jedes $n \in \mathbb{N}^{\geq 1}$ die Zahl a_{n+1} die letzte Ziffer in der Dezimaldarstellung von $a_n^n + a_{n-1}$ sein soll. Zeige, dass ein $n_0 \in \mathbb{N}$ so existiert, dass $(a_{i+n_0} : i \in \mathbb{N})$ periodisch ist.

Aufgabe 3: In einem schlichten Graphen G habe jede Ecke einen Grad von mindestens $\frac{|G|}{2}$. Zeige, dass G zusammenhängend ist.

Aufgabe 4: Es seien $a, b \in \mathbb{Z}$. Eine Folge $(x_i : i \in \mathbb{N})$ natürlicher Zahlen sei definiert durch: $x_0 = a$, $x_1 = b$, $x_{n+2} = ax_{n+1} + bx_n$. Zeige: Es existieren natürliche Zahlen $c, d \in \mathbb{Z}$ so, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt: $x_{2n+4} = cx_{2n+2} + dx_{2n}$.

Aufgabe 5: Es sei a die Anzahl natürlicher Zahlen unterhalb von 10^{20} , die in ihrer Dezimaldarstellung die Ziffer 1 enthalten, ferner b die Anzahl derjenigen natürlichen Zahlen unterhalb von 10^{20} , die in ihrer Dezimaldarstellung die Ziffer 1 nicht enthalten. Entscheide (mit Beweis!), ob $a < b$, $a = b$ oder $a > b$ gilt.