Aufgaben zum Unendlichen Abstieg und Rückwärtsarbeiten

Aufgabe 1: Es seien $n \in \mathbb{N}$ und $a_1, ..., a_{2n+1}$ natürliche Zahlen mit folgender Eigenschaft: Entfernt man ein beliebiges der a_i, so lassen sich die übrigen Zahlen so in zwei Teilmengen mit n Elementen aufteilen, dass die Summe über die Elemente für beide Teilmengen gleich ist. Zeige, dass alle diese Zahlen gleich sein müssen.

Aufgabe 2: Die Fibonacchifolge $(F_i : i \in \mathbb{N})$ sei definiert durch $F_1 = F_2 = 1$ und $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$ für $n \in \mathbb{N}$. Die Fibonaccifolge modulo n ist die Folge der Reste von F_i bei Division durch n.

(a) Zeige: Für jedes $n \in \mathbb{N}$ ist die Fibonaccifolge modulo n periodisch, d.h. es existiert ein $k \in \mathbb{N}$ so, dass $F_i \equiv F_{i+k} \pmod{n}$ für alle $i \in \mathbb{N}$.

(b) Zeige: Für jedes $n \in \mathbb{N}$ existiert ein $m \in \mathbb{N}$ so, dass $n|F_m$.

(c) Zeige, dass die Behauptung in (b) wahr bleibt, wenn man das 'existiert ein' durch 'existieren unendlich viele' ersetzt.

Aufgabe 3: Bestimme alle $x, y \in \mathbb{Z}$ so, dass $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{2}$.

Abgabe am 24.11.2015 im Seminar.