Fachbereich Mathematik und Statistik
der Universität Konstanz
Merlin Carl

WS 15/16
12.01.2016
Aufgaben zur Zahlentheorie

Aufgaben zur Zahlentheorie

Aufgabe 1:

(a) Die Nachkommastellen der Dezimaldarstellung der reellen Zahl $0 < u < 1$ erhält man, indem man die Dezimaldarstellungen sämtlicher natürlicher Zahlen in ihrer natürlichen Reihenfolge aneinanderhängt; es ist also $u = 0.123456789101112131415....$ Zeige: u ist irrational.

(b) Eine positive reelle Zahl $x < 1$ heißt 'universell', wenn die Dezimaldarstellung jeder natürlichen Zahl irgendwo als Folge aufeinanderfolgender Ziffern in ihrer Dezimaldarstellung vorkommt. Zeige: Jede universelle Zahl ist irrational.

(c) Die Nachkommastellen der Dezimaldarstellung der reellen Zahl $0 < d < 1$ erhält man, indem man die Dezimaldarstellungen sämtlicher Potenzen von 3 in ihrer natürlichen Reihenfolge aneinanderhängt; es ist also $d = 0.1392781243....$ Zeige: d ist irrational.

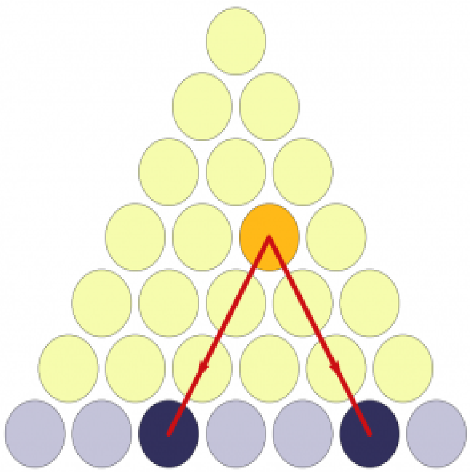
Aufgabe 2:

(a) Zeige: Ist n eine natürliche Zahl, so hat $n^2 + 1$ keine Primfaktoren p der Form $4k - 1$.[1]

(b) Zeige: Ist n eine natürliche Zahl, so sind alle Primfaktoren von $4n^2 + 1$ von der Form $4k + 1$.

(c) Zeige: Es gibt unendlich viele Primzahlen der Form $4k + 1$.

Aufgabe 3: Im Folgenden findest Du einen 'Bildbeweis' der Formel $1+2+...+n = \binom{n+1}{2}$, wobei wir mit $\binom{n}{2}$ wie üblich die Anzahl der Möglichkeiten verstehen, aus n Dingen zwei auszuwählen. Stelle diesen Beweis als schlüssiges mathematisches Argument sprachlich dar. Erläutere und begründe den Übergang vom Bild zum Text.



Abgabe am 19.01.2016 im Seminar.

[1]Tipp: Widerspruchsbeweis: Angenommen, $n^2 \equiv -1 \mod p$. Benutze den Satz von Lagrange: Ist H Untergruppe der endlichen Gruppe G, so ist $|H|$ Teiler von $|G|$.