Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Wintersemester 2010/2011

Dr. Andrew Dolphin
Prof. Dr. Markus Schweighofer

Übungsblatt 4 zur Einführung in die Algebra

Aufgabe 1. Sei G eine Gruppe und $H \leqslant G$ mit $[G : H] = 2$. Zeige $H \triangleleft G$. Ist H notwendigerweise eine charakteristische Untergruppe?

Aufgabe 2. Sei G eine zyklische Gruppe und $H \leqslant G$. Zeige dass H zyklisch ist.

Aufgabe 3. Sei G eine Gruppe, $N \triangleleft G$. Betrachte

$$X := \{H \mid N \leq H \leq G\} \text{ und } Y := \{J \mid J \leq G/N\}.$$

Zeige, dass

$$X \to Y,\ H \mapsto H/N$$

bijektiv ist. Seien $H,I \in X$. Zeige ferner, dass für alle $H,I \in X$ gilt:

(a) $H \leqslant I \Leftrightarrow H/N \leqslant I/N$.

(b) $H \leqslant I \Rightarrow [I : H] = [I/N : H/N]$.

(c) $H \triangleleft G \Leftrightarrow (H/N) \triangleleft (G/N)$.

Aufgabe 4. Seien N und H Gruppen und $\varphi\colon H \to \operatorname{Aut}(N)$ ein Homomorphismus. Dann wird die Menge $N \times H$ vermöge

$$(a,b)(a',b') := (a\varphi(b)(a'),bb') \qquad (a,a' \in N,\ b,b' \in H)$$

eine Gruppe $N \rtimes_\varphi H$ und die Abbildungen $N \to N \rtimes_\varphi H$, $a \mapsto (a,1)$ und $H \to N \rtimes_\varphi H$, $b \mapsto (1,b)$ sind Einbettungen.

Abgabe bis Montag, den 15. November 2010, vor der Vorlesung.