Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Wintersemester 2010/2011

Dr. Andrew Dolphin
Prof. Dr. Markus Schweighofer

Übungsblatt 6 zur Einführung in die Algebra

Aufgabe 1. Sei A ein kommutativer Ring und $S \subseteq A$ eine multiplikative Menge ohne Nullteiler.

(a) Zeige, dass auf $A \times S$ durch

$$(a,s) \sim (b,t) \iff at = bs \qquad (a,b \in A,\ s,t \in S)$$

eine Äquivalenzrelation $\sim$ definiert wird.

(b) Durch

$$\widetilde{(a,s)} + \widetilde{(b,t)} := \widetilde{(at+bs,st)} \quad \text{und} \quad \widetilde{(a,s)}\widetilde{(b,t)} := \widetilde{(ab,st)} \qquad (a,b \in A,\ s,t \in S)$$

erhält man wohldefinierte Operationen $+$ und $\cdot$ auf $(A \times S)/\sim$.

(c) Mit den Operationen aus (b) wird $(A \times S)/\sim$ zu einem kommutativen Ring mit $0 = \widetilde{(0,1)}$ und $1 = \widetilde{(1,1)}$.

(d) Es ist $\iota\colon A \to (A \times S)/\sim,\ a \mapsto \widetilde{(a,1)}$ eine Einbettung.

Aufgabe 2. Sei A ein Unterring des kommutativen Ringes B, $S \subseteq A \cap B^\times$ multiplikativ und $B = S^{-1}A$. Sei C ein weiterer Ring und $\varphi\colon A \to C$ ein Homomorphismus.

(a) Zeige, dass es genau dann einen Homomorphismus $\psi\colon S^{-1}A \to C$ mit $\varphi = \psi|_A$ gibt, wenn $\varphi(S) \subseteq C^\times$.

(b) Zeige, dass ein Homomorphismus ψ wie in (a) eindeutig bestimmt. Genauer: Zeige, dass für dieses ψ gilt

$$\psi\left(\frac{a}{s}\right) = \frac{\varphi(a)}{\varphi(s)} \qquad \text{für alle } a \in A \text{ und } s \in S.$$

Aufgabe 3. Sei R ein kommutativer Ring, $n \in \mathbb{N}$ und $A := R[X_1, \ldots, X_n]$

(a) Zeige $A^\times = R^\times$, wenn R ein Integritätsring ist.

(b) Gebe ein Beispiel für R mit $A^\times \neq R^\times$.

Aufgabe 4. Seien S und T multiplikative Mengen eines kommutativen Ringes R mit $S \subseteq T$.

(a) Zeige, dass $\overline{T} := \iota_S(T)$ eine multiplikative Menge in der Lokalisierung R_S ist.

(b) Zeige $(R_S)_{\overline{T}} \cong R_T$.

Abgabe bis Montag, den 29. November 2010, vor der Vorlesung.