Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Wintersemester 2010/2011

Dr. Andrew Dolphin
Prof. Dr. Markus Schweighofer

Übungsblatt 9 zur Einführung in die Algebra

Aufgabe 1. Bestimme die Menge $A := \{a \in \mathbb{C} \,|\, \mathbb{C}[X]/(X^2 + a) \cong \mathbb{C} \times \mathbb{C}\}$, also die Menge aller $a \in \mathbb{C}$, für die Ringe $\mathbb{C}[X]/(X^2 + a)$ und $\mathbb{C} \times \mathbb{C}$ isomorph sind.

Aufgabe 2. Sei $G \in \{\mathrm{GL}_2(\mathbb{R}), \mathrm{SL}_2(\mathbb{R}), \mathrm{O}_2(\mathbb{R}), \mathrm{SO}_2(\mathbb{R}), T\}$ wobei T die Gruppe von invertierbaren unteren 2×2–Dreiecksmatrizen bezeichnet.

Sei $X \in \{\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}, \{0\}\}$. Es wirke G auf X in natürlicher Weise (d.h. durch Multiplikation einer Matrix mit einem Vektor).

Gebe für jeden $5 \cdot 3 = 15$ Fälle für (G,X) an, ob die Wirkung transitiv ist, ob sie treu ist und ob sie frei ist.

Aufgabe 3. Sei G eine endliche Gruppe und sei $H \lhd G$ Normalteiler von G. Sei $\tau : G \times X \to X$ eine transitive Gruppenwirkung. Zeige, dass es zwischen je zwei Bahnen der Einschränkung von τ auf $H \times X$ eine Bijektion gibt.

Aufgabe 4. Sei G eine Gruppe und $H \lhd G$ abelsch. Zeige, dass durch $\tau(gH,h) := ghg^{-1}$ für $g \in G$ und $h \in H$ eine Abbildung $\tau : G/H \times H \to H$ definiert wird und dass diese Abbildung eine Wirkung der Gruppe G/H auf H ist.

Suche ein Beispiel für eine Untergruppe H, die nicht abelsch ist, so dass τ nicht wohldefiniert ist.

Abgabe bis Montag, den 20. Dezember 2010, vor der Vorlesung.