Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Wintersemester 2010/2011

Dr. Andrew Dolphin
Prof. Dr. Markus Schweighofer

Übungsblatt 12 zur Einführung in die Algebra

Aufgabe 1. Sei $M \subseteq \mathbb{C}$ eine Menge mit $\{0{,}1\} \subseteq M$. Zeige, dass für alle $z \in \mathbb{C}$ gilt

$$z \in \curlywedge M \Rightarrow \sqrt{z} \in \curlywedge M.$$

Für die Aufgaben 2 bis 4 nehmen wir folgende Definitionen aus der Vorlesung vorweg:

Sei $L|K$ eine Körpererweiterung.

(a) Sei $A \subseteq K[X] \setminus \{0\}$. Dann heißt L ein *Zerfällungskörper* von A über K, wenn jedes Polynom aus A in $L[X]$ (in Linearfaktoren) zerfällt und L aus K durch Adjunktion der entsprechenden Nullstellen entsteht, das heißt

$$L = K(\{a \in L \mid \exists f \in A : f(a) = 0\}).$$

(b) Sei $f \in K[X] \setminus \{0\}$. Dann heißt L ein *Zerfällungskörper* von f über K, wenn L ein *Zerfällungskörper* von $\{f\}$ über K ist, mit anderen Worten wenn es $c \in K^\times$, $n \in \mathbb{N}_0$ und $a_1, \ldots, a_n \in L$ gibt mit $f = c \prod_{i=1}^n (X - a_i)$ und $L = K(a_1, \ldots, a_n)$.

Beispiel: $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}, e^{\frac{2\pi i}{3}})$ ist ein Zerfällungskörper von $X^3 - 2$, denn

$$X^3 - 2 = (X - \sqrt[3]{2})(X - \sqrt[3]{2}\zeta)(X - \sqrt[3]{2}\zeta^2)$$

mit $\zeta := e^{\frac{2\pi i}{3}}$ und $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}, \sqrt[3]{2}\zeta, \sqrt[3]{2}\zeta^2) = \mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}, \zeta)$.

Aufgabe 2. Sei K ein Körper und L ein Zerfällungskörper von $K[X] \setminus \{0\}$ über K. Zeige, dass L ein algebraischer Abschluss von K ist.

Hinweis: Benutze zum Beispiel 4.2.6(d) aus der Vorlesung.

Aufgabe 3. Sei K ein Körper, $f \in K[X] \setminus \{0\}$ und $n := \deg f$. Sei L der Zerfällungskörper von f über K. Zeige, dass $[L : K]$ ein Teiler von $n! = n(n-1)(n-2) \cdots 1$ ist.

Hinweis: Beachte, dass $(k!)((n-k)!)$ ein Teiler von $n!$ ist für alle $n \in \mathbb{N}_0$ und $k \in \{0, \ldots, n\}$, da der Binomialkoeffizient $\binom{n}{k}$ eine natürliche Zahl ist.

Aufgabe 4. Finde den Zerfällungskörper L von f über $\mathbb{Q}$ (genauer: beschreibe, wie er aus $\mathbb{Q}$ durch Adjunktion von wenigen möglichst „einfachen“ komplexen Zahlen entsteht) und berechne $[L : \mathbb{Q}]$, wobei

(i) $f = X^3 - 1$;

(ii) $f = X^4 + 5X^2 + 6$;

(iii) $f = X^6 - 8$.

Abgabe bis Montag, den 24. Januar 2011, vor der Vorlesung.