

# Dynamische Systeme

Michael Dreher  
Fachbereich für Mathematik und Statistik  
Universität Konstanz

Wintersemester 2007/08



# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Dynamische Systeme mit endlichdimensionalem Zustandsraum</b>	<b>5</b>
1.1	Dynamische Systeme . . . . .	5
1.2	Grundbegriffe . . . . .	6
1.3	Asymptotisches Verhalten und Stabilität . . . . .	6
1.4	Stabilität von Fixpunkten in diskreten Systemen . . . . .	10
1.5	Klassifikation ebener linearer Differentialgleichungen . . . . .	12
1.6	Wronski-Determinanten und der Satz von Liouville . . . . .	16
1.7	Stabilität von periodischen Lösungen . . . . .	21
1.8	Mittelung . . . . .	27
1.9	Lyapunov-Funktionale . . . . .	31
1.10	$\omega$ -Limesmengen und Invarianzprinzipien . . . . .	33
1.11	Stabile und instabile Mannigfaltigkeiten . . . . .	36
1.12	Die Gleichung von FISHER . . . . .	44
1.13	Nulleigenwerte . . . . .	47
1.14	Bifurkationen . . . . .	49
1.15	Rein imaginäre Eigenwerte . . . . .	53
1.16	Die Poincare-Andronov-Hopf-Bifurkation . . . . .	56
1.17	Zentrumsmanigfaltigkeiten . . . . .	60
1.18	Der Satz von POINCARÉ-BENDIXSON . . . . .	61
<b>2</b>	<b>Dyn. Syst. mit unendlichdimensionalem Zustandsraum</b>	<b>67</b>
2.1	Unterschiede zum endlichdimensionalen Fall . . . . .	67
2.2	Diffusionsgleichungen . . . . .	71
2.3	Dispersion . . . . .	72
2.4	Lösungsbegriffe . . . . .	74
2.5	Die KPP-Gleichung . . . . .	75
2.6	Die Gleichung von BURGERS . . . . .	79
2.7	Die KORTEVEG – DE VRIES – Gleichung . . . . .	80
<b>A</b>	<b>Lineare Algebra</b>	<b>89</b>

## Inhaltsüberblick

Sei  $H$  ein sogenannter *Zustandsraum*, in dem die Variable  $x$  lebt. Wir betrachten Differentialgleichungen der Form

$$\partial_t x = A(t, x)$$

und untersuchen folgende Aspekte:

- Fixpunkte
- periodische Bahnen
- Grenzyklen
- stabile bzw. instabile Mannigfaltigkeiten, Zentrumsmannigfaltigkeiten
- Transformationen auf Normalform
- Bifurkationen bei Parameterabhängigkeit  $\partial_t x = A(\mu, x)$

In einem zweiten Teil der Vorlesung beschäftigen wir uns mit Differentialgleichungen wie z.B. der Korteweg-de Vries-Gleichung, der nichtlinearen Schrödingergleichung oder der Sinus-Gordon-Gleichung; und es soll um folgende Themen gehen:

- integrable Systeme
- spezielle Lösungen: travelling waves, Solitonen, Kinks/Antikinks

# Kapitel 1

## Dynamische Systeme mit endlichdimensionalem Zustandsraum

### 1.1 Dynamische Systeme

**Beispiel 1.1.** Gegeben sei  $x_0 \in \mathbb{R}^2$  und eine Funktion  $f \in C(\mathbb{R}^2; \mathbb{R}^2)$ . Wir betrachten die Folge  $(x_0, x_1, \dots)$ , die gegeben wird durch  $x_j = f(x_{j-1})$  für  $j \geq 1$ .

Wir erhalten also eine Abbildung

$$\begin{aligned} (j, x_0) &\mapsto x_j = f(f(f(\dots(x_0))))), \\ (\mathbb{N}_0, \mathbb{R}^2) &\rightarrow \mathbb{R}^2. \end{aligned}$$

**Beispiel 1.2.** Gegeben sei  $x_0 \in \mathbb{R}^2$  und eine Funktion  $f \in C^1(\mathbb{R}^2; \mathbb{R}^2)$ . Wir betrachten eine Funktion  $x = x(t)$  mit

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= f(x), \\ x(0) &= x_0, \end{aligned}$$

wobei wir der Einfachheit halber voraussetzen wollen, daß diese Lösung  $x = x(t)$  des Anfangswertproblems global existiert.

Wir erhalten also eine Abbildung

$$\begin{aligned} (t, x_0) &\mapsto x = x(t), \\ (\mathbb{R}, \mathbb{R}^2) &\rightarrow \mathbb{R}^2. \end{aligned}$$

**Definition 1.3.** Ein dynamisches System besteht aus einer Menge  $X$  (dem Phasenraum), einer Gruppe  $G$  (meist  $G = (\mathbb{R}, +)$  oder  $G = (\mathbb{Z}, +)$ ), und einer Abbildung (dem Fluß)

$$\begin{aligned} \Phi: (t, x) &\mapsto \Phi(t, x) =: \Phi_t(x), \\ \Phi: G \times X &\rightarrow X, \end{aligned}$$

mit folgenden Eigenschaften:

- $\Phi(0, x) = x$  für jedes  $x \in X$ ,
- $(\Phi_t \circ \Phi_s)(x) = \Phi(t, \Phi(s, x)) = \Phi(t + s, x) = \Phi_{t+s}(x)$  für alle  $t, s \in G$  und alle  $x \in X$ ,
- wenn  $t$  fest ist, dann ist die Abbildung  $t \mapsto \Phi(t, x)$  ein Diffeomorphismus, d.h.,  $\Phi_t$  ist invertierbar, und  $\Phi_t$  sowie  $(\Phi_t)^{-1}$  sind differenzierbar.

Wenn  $G = \mathbb{R}$ , dann reden wir von einem *kontinuierlichem dynamischen System*.

Und wenn  $G = \mathbb{Z}$ , dann reden wir von einem *diskreten dynamischen System*. In diesem Fall ist  $\Phi_m = \Phi_1 \circ \dots \circ \Phi_1$ , also wird das Verhalten ausschließlich von  $\Phi_1$  bestimmt.

Wir interpretieren  $t$  als Zeitvariable, und  $X$  als den Raum aller möglichen Zustände des Systems. Zum Beispiel kann  $X = \mathbb{R}^k$  sein, oder  $X$  ist eine Mannigfaltigkeit.

Wenn  $t$  fest ist, dann heißt  $\Phi_t: X \rightarrow X$  auch *Zeit- $t$ -Abbildung* von  $\Phi$ .

## 1.2 Grundbegriffe

**Definition 1.4.** Sei  $G = \mathbb{R}$  oder  $G = \mathbb{Z}$ , und sei  $x_0 \in X$ .

Die Menge

$$\gamma(x_0) = \{\Phi_t(x_0) : t \in G\}$$

heißt Orbit von  $x_0$ .

Weiterhin heißen die Mengen

$$\gamma_+(x_0) = \{\Phi_t(x_0) : t \in G, \quad t > 0\},$$

$$\gamma_-(x_0) = \{\Phi_t(x_0) : t \in G, \quad t < 0\}$$

Vorwärtsorbit von  $x_0$  bzw. Rückwärtsorbit von  $x_0$ .

**Definition 1.5.** Sei ein dynamisches System mit Fluß  $\Phi$  auf einem Phasenraum  $X$  gegeben.

- Ein Punkt  $x_0 \in X$  heißt Fixpunkt (für  $G = \mathbb{Z}$ ) bzw. Ruhelage, stationärer Punkt, Gleichgewicht (für  $G = \mathbb{R}$ ), wenn  $\gamma(x_0) = x_0$ , also  $\Phi_t(x_0) = x_0$  für jedes  $t \in G$ .
- Ein Punkt  $x_0 \in X$  heißt periodischer Punkt mit minimaler Periode  $p$ , wenn  $\Phi_p(x_0) = x_0$ , aber  $\Phi_t(x_0) \neq x_0$  für jedes  $0 < t < p$ . Der Orbit  $\gamma(x_0)$  heißt periodischer Orbit.
- Ein Orbit  $\gamma(x_0)$  heißt heterokliner Orbit, wenn es zwei Gleichgewichte  $x_-$  und  $x_+$  gibt mit

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} \Phi_t(x_0) = x_-, \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} \Phi_t(x_0) = x_+.$$

Wenn  $x_- = x_+$ , dann reden wir von einem homoklinen Orbit.

Als Beispiel betrachten wir das *logistische Wachstum*, also eine Funktion  $x = x(t)$ , die die Differentialgleichung

$$\dot{x}(t) = \alpha x(t) - \beta x^2(t)$$

erfüllt. Dieses Modell geht auf VERHULST (1858) zurück und beschreibt das Wachstum einer Population mit der Populationsstärke  $x$ ; und die Zahlen  $\alpha, \beta$  sind positive Parameter.

Man stellt schnell fest, daß  $x_* = 0$  und  $x^* = \frac{\alpha}{\beta}$  die einzigen Gleichgewichtspunkte sind. Wenn zum Zeitpunkt  $t = 0$  die Populationsstärke  $x_0 \in (0, \frac{\alpha}{\beta})$  beträgt, dann ist der Orbit  $\gamma(x_0)$  genau ein heterokliner Orbit, der die Gleichgewichtspunkte  $x_- = x_*$  und  $x_+ = x^*$  verbindet.

Als warnenden Hinweis merken wir an, daß es auch eine diskrete Version des logistischen Modells gibt, deren Verhalten sich allerdings komplett von dem des kontinuierlichen Modells unterscheidet.

## 1.3 Asymptotisches Verhalten und Stabilität

Wir stellen uns die Frage, ob es Teile von  $X$  gibt, die durch den Fluß  $\Phi$  in sich abgebildet werden.

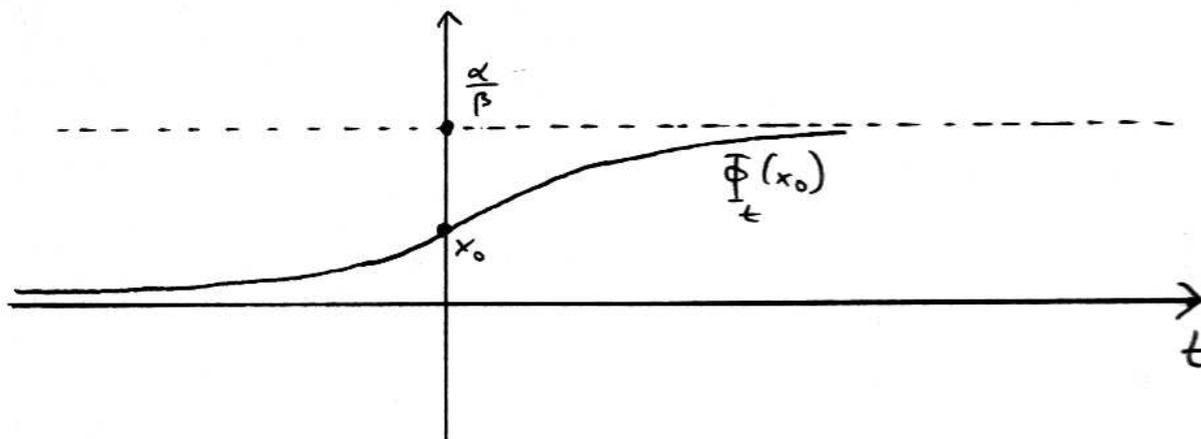


Abbildung 1.1: Logistisches Wachstum

**Definition 1.6.** Sei  $\Phi$  ein Fluß auf dem Phasenraum  $X$ . Eine Teilmenge  $M \subset X$  heißt positiv invariant, wenn  $\Phi_t(M) \subset M$  für jedes  $t \geq 0$  ist

Diese Teilmenge  $M$  heißt negativ invariant, wenn  $\Phi_t(M) \subset M$  für jedes  $t \leq 0$  ist.

Wenn  $M$  sowohl positiv als auch negativ invariant ist, dann nennen wir sie invariant.

**Beispiel:** Für das logistische Modell der Differentialgleichung  $\dot{x} = \alpha x - \beta x^2$  haben wir als invariante Teilmengen von  $X = \mathbb{R}$ :

$$M_1 = (\alpha/\beta, +\infty),$$

$$M_2 = \{\alpha/\beta\},$$

$$M_3 = (0, \alpha/\beta),$$

$$M_4 = (-\infty, 0),$$

sowie jede Vereinigungsmenge davon.

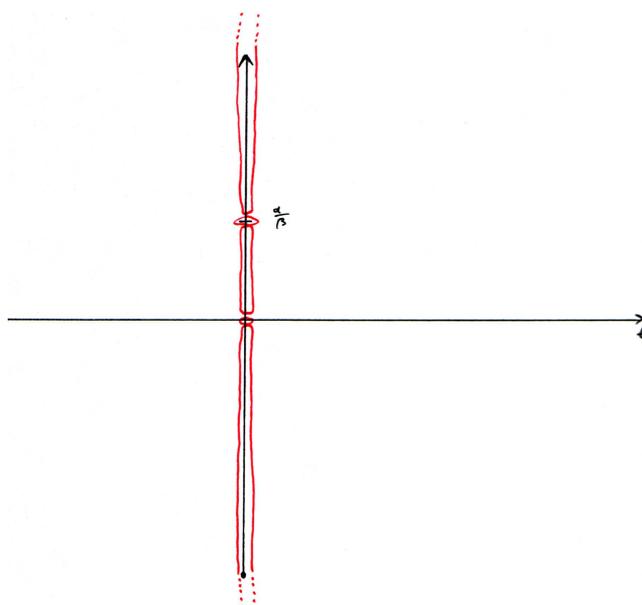


Abbildung 1.2: Invariante Mengen beim logistischen Wachstum

**Definition 1.7.** Sei  $\Phi$  ein Fluß auf einem metrischen Raum  $X$ , und sei  $M \subset X$  nichtleer, kompakt und invariant.

Die Menge  $M$  heißt stabil bzw. LYAPUNOV-stabil, wenn:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0: \forall x_0, \quad \text{dist}(x_0, M) < \delta \implies \forall t \geq 0: \text{dist}(\Phi_t(x_0), M) < \varepsilon$$

Die Menge  $M$  heißt asymptotisch stabil, wenn gilt:

$$\exists \varepsilon > 0: \forall x_0, \quad \text{dist}(x_0, M) < \varepsilon \implies \lim_{t \rightarrow \infty} \text{dist}(\Phi_t(x_0), M) = 0.$$

Eine Menge  $M$  heißt instabil, wenn sie nicht stabil ist.

Im Sinne dieser Definitionen gibt es Mengen, die asymptotisch stabil sind, aber nicht stabil. Aus diesem Grunde wird in vielen Büchern eine andere Definition für asymptotische Stabilität verwendet, die ausdrücklich voraussetzt, daß  $M$  stabil sein soll.

**Beispiel:** Für das logistische Wachstum mit der Differentialgleichung  $\dot{x} = \alpha x - \beta x^2$  stellen wir fest, daß der stationäre Punkt  $x^* = \alpha/\beta$  stabil ist, während der stationäre Punkt  $x_* = 0$  instabil ist.

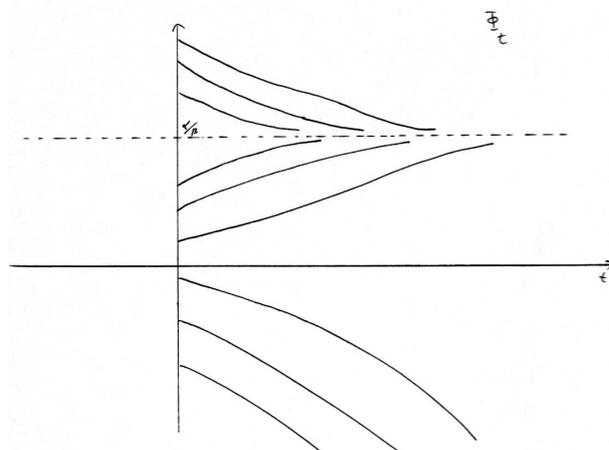


Abbildung 1.3: Stabilität beim logistischen Wachstum

Wir untersuchen den stabilen Punkt  $x^*$  mittels einer Linearisierung  $x(t) = x^* + y(t)$ , wobei wir uns  $|y|$  als klein vorstellen:

$$\dot{y} = \dot{x} - 0 = \alpha x - \beta x^2 = \dots = -\alpha y - \beta y^2,$$

und die Ruhelage  $y = 0$  des Systems  $\dot{y} = -\alpha y - \beta y^2$  ist asymptotisch stabil, denn wir haben den folgenden Satz:

**Satz 1.8 (Asymptotische Stabilität für kontinuierliche autonome nichtlineare Systeme).** Sei  $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$  mit Eigenwerten  $\lambda_j$ , für die jeweils  $\Re \lambda_j < 0$  gilt. Sei  $g: \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$  lokal lipschitzstetig mit  $g(x) = o(\|x\|)$  für  $x \rightarrow 0$ .

Dann ist die Ruhelage  $x = 0$  der Differentialgleichung  $\dot{x} = Ax + g(x)$  asymptotisch stabil.

*Beweis.* Sei  $\|x_0\| < \varepsilon$  mit einem positiven  $\varepsilon$ , das wir gleich angeben werden.

Wir wissen, daß die Differentialgleichung eine Lösung  $x = x(t)$  auf einem Intervall  $[0, T)$  besitzt, mit einem möglicherweise endlichen  $T$ . Für den Beweis der Stabilität müssen wir also auch  $T = \infty$  zeigen.

Wenn  $0 \leq t < T$ , dann gilt die Darstellung

$$x(t) = e^{At} x_0 + \int_{s=0}^t e^{A(t-s)} g(x(s)) ds.$$

Es gibt ein positives  $\alpha$  mit der Eigenschaft, daß jeder Eigenwert  $\lambda_j$  der Matrix  $A$  die Bedingung  $\Re \lambda_j < -\alpha$  erfüllt.

Dann wissen wir, daß eine Konstante  $C_0 > 1$  existiert, sodaß

$$\|e^{At}\| \leq C_0 e^{-\alpha t}, \quad 0 \leq t < \infty.$$

Damit folgt dann die Abschätzung

$$\|x(t)\| \leq C_0 e^{-\alpha t} \|x_0\| + C_0 \int_{s=0}^t e^{-\alpha(t-s)} \|g(x(s))\| \, ds.$$

Nun wählen wir ein  $\varepsilon_0$  mit  $0 < \varepsilon_0 < \alpha$ .

Wir wählen danach ein  $\delta > 0$  mit der Eigenschaft, daß

$$\|x\| \leq \delta \implies \|g(x)\| \leq \frac{\varepsilon_0}{C_0} \|x\|.$$

Wir wählen anschließend ein  $\varepsilon$  mit der Bedingung  $C_0 \varepsilon \leq \delta$ .

Klar ist:  $C_0 > 1$  und  $\|x(t)\| \leq \varepsilon$  für  $t = 0$ , also  $\|x(0)\| < \delta$ . Wegen der Stetigkeit der Funktion  $t \mapsto \|x(t)\|$  ist dann  $\|x(t)\| \leq \delta$  für zumindest ein kleines nichtleeres Zeitintervall. Für solche Zeiten haben wir dann

$$\begin{aligned} \|x(t)\| &\leq C_0 e^{-\alpha t} \|x_0\| + C_0 \int_{s=0}^t e^{-\alpha(t-s)} \|g(x(s))\| \, ds \\ &\leq C_0 e^{-\alpha t} \varepsilon + C_0 \int_{s=0}^t e^{-\alpha(t-s)} \frac{\varepsilon_0}{C_0} \|x(s)\| \, ds \\ &\leq \delta e^{-\alpha t} + \varepsilon_0 \int_{s=0}^t e^{-\alpha(t-s)} \|x(s)\| \, ds, \\ \|e^{\alpha t} x(t)\| &\leq \delta + \varepsilon_0 \int_{s=0}^t \|e^{\alpha s} x(s)\| \, ds \end{aligned}$$

Nun setzen wir  $u(s) = \|e^{\alpha s} x(s)\|$ . Dann haben wir  $u(s) \geq 0$  und

$$u(t) \leq \delta + \varepsilon_0 \int_{s=0}^t u(s) \, ds.$$

Wir definieren  $v(t) = \int_{s=0}^t u(s) \, ds$ . Dies liefert uns  $v(t) \geq 0$  sowie

$$\begin{aligned} v'(t) &\leq \delta + \varepsilon_0 v(t), \\ (v(t)e^{-\varepsilon_0 t})' &\leq \delta e^{-\varepsilon_0 t}, \\ \int_{s=0}^t (v(s)e^{-\varepsilon_0 s})' \, ds &\leq \delta \int_{s=0}^t e^{-\varepsilon_0 s} \, ds, \\ v(t)e^{-\varepsilon_0 t} &\leq \frac{\delta}{\varepsilon_0} (1 - e^{-\varepsilon_0 t}). \end{aligned}$$

Daraus gewinnen wir dann  $u(t) \leq \delta + \varepsilon_0 v(t) \leq \delta e^{\varepsilon_0 t}$ , und somit

$$\|x(t)\| \leq \delta e^{-(\alpha - \varepsilon_0)t},$$

für  $t$  aus einer kleinen Halbumgebung von 0. Wegen  $\varepsilon_0 < \alpha$  ist dann  $\|x(t)\| < \delta$  auch am Ende dieses Zeitintervalls. Es folgt, daß wir die Lösung  $x = x(t)$  auf ganz  $\mathbb{R}_+$  fortsetzen können, und stets ist  $\|x(t)\| \leq \delta$ . Wir haben insgesamt die Abklingabschätzung

$$\|x(t)\| \leq \delta e^{-(\alpha - \varepsilon_0)t}, \quad t \in \mathbb{R}_+.$$

□

Allgemeiner betrachtet, haben wir folgende Situation:

Wir untersuchen das System zur Differentialgleichung  $\dot{x} = f(x)$ , wobei  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  stetig differenzierbar sein soll. Sei  $x^*$  stationär, also  $f(x^*) = 0$ . Wenn wir  $x = x^* + y$  schreiben, dann haben wir

$$\dot{y} = \dot{x} = f(x) = f(x^* + y) = f(x^*) + f'(x^*)y + R(y),$$

also  $\dot{y} = f'(x^*)y + R(y)$ , und es ist  $f'(x^*)$  die JACOBI-Matrix am Punkt  $x^*$ , und  $R$  ist ein Rest im Sinne von

$$\lim_{y \rightarrow 0} \frac{\|R(y)\|}{\|y\|} = 0.$$

**Satz 1.9.** *Die Ruhelage  $x^*$  ist asymptotisch stabil, wenn alle Eigenwerte von  $f'(x^*)$  einen negativen Realteil haben.*

## 1.4 Stabilität von Fixpunkten in diskreten Systemen

Sei  $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$  und  $x_0 \in \mathbb{C}^n$  beliebig. Wir definieren eine Folge  $(x_0, x_1, \dots)$  gemäß  $x_{k+1} = Ax_k$ .

Für einen Fixpunkt  $x^*$  gilt  $x^* = Ax^*$ . Wann ist  $x^*$  asymptotisch stabil?

Klar ist: wenn  $x^* = Ax^*$ , dann ist auch  $x_\varepsilon^* = Ax_\varepsilon^*$  mit  $x_\varepsilon^* = (1 + \varepsilon)x^*$ . Nun ist  $\|x_\varepsilon^* - x^*\|$  beliebig klein für  $\varepsilon \rightarrow +0$ , also kann höchstens  $x^* = 0$  asymptotisch stabil sein.

Aus der linearen Algebra ist bekannt, daß

$$x_k = \sum_{\lambda \in \sigma(A)} p_\lambda(k) \lambda^k$$

ist, wobei  $\sigma(A)$  das Spektrum von  $A$  ist, also die Menge der Eigenwerte, und  $p_\lambda = p_\lambda(k)$  ein vektorwertiges Polynom in  $k$  ist, mit Grad um eins kleiner als der größte Jordan-Block zum Eigenwert  $\lambda$ .

Wenn nun  $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = 0$  sein soll, dann muß  $|\lambda| < 1$  sein für jeden Eigenwert von  $A$ .

**Satz 1.10.** *Der Fixpunkt  $x^* = 0$  des diskreten dynamischen Systems zur Rekursion*

$$x_0 \in \mathbb{C}^n, \quad x_{k+1} = Ax_k$$

*ist asymptotisch stabil genau dann, wenn alle Eigenwerte von  $A$  im Innern des Einheitskreises liegen.*

Wir erweitern dieses System zum nichtlinearen Fall:

**Satz 1.11.** *Wir betrachten das diskrete dynamische System zur Rekursion*

$$x_0 \in \mathbb{R}^n, \quad x_{k+1} = F(x_k)$$

*mit  $F \in C^1(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$  und Fixpunkt  $x^*$ . Dieser Fixpunkt ist asymptotisch stabil, wenn die Jacobi-Matrix  $F'(x^*)$  nur Eigenwerte im Inneren des Einheitskreises hat.*

Dieser Satz ist das diskrete Analogon zum Satz 1.8, weshalb wir den Beweis nicht komplett ausführen.

*Beweisskizze.* Wir definieren eine Folge  $(y_0, y_1, \dots)$  gemäß  $x_k = x^* + y_k$ . Dann haben wir

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= x^* + y_{k+1} = F(x_k) = F(x^* + y_k) = F(x^*) + F'(x^*)y_k + R(y_k) \\ &= x^* + F'(x^*)y_k + R(y_k). \end{aligned}$$

Per Induktion beweist man dann die diskrete Duhamel-Formel:

$$y_k = (F'(x^*))^k y_0 + \sum_{j=0}^{k-1} (F'(x^*))^{k-1-j} R(y_j).$$

Man vergleiche dies mit der Formel

$$x(t) = e^{At} x_0 + \int_{s=0}^t e^{A(t-s)} g(x(s)) ds$$

aus dem Beweis zu Satz 1.8, zur Orientierung beachte man die Korrespondenz  $t \leftrightarrow k$ ,  $j \leftrightarrow s$ ,  $\sum \leftrightarrow \int$  und  $R \leftrightarrow g$ .

Der Rest verläuft sinngemäß zum Beweis zu Satz 1.8. □

Als Beispiel betrachten wir eine diskrete Version des logistischen Wachstums. Eine Skalierung der Populationsdichte kann benutzt werden, um die Rekursion auf die Gestalt

$$N_{k+1} = \lambda N_k(1 - N_k) =: f_\lambda(N_k), \quad k \in \mathbb{N}_0$$

zu bringen. Wir setzen hierbei immer voraus, daß der Anfangswert  $N_0$  zwischen 0 und 1 liegt, und wir interessieren uns für das Langzeitverhalten für  $k \rightarrow \infty$ .

**Fall 1:**  $0 < \lambda < 1$ : Dann ist  $0 < f_\lambda(N) < N$ , und die Folge  $(N_0, N_1, \dots)$  ist streng monoton fallend mit Grenzwert 0. Der Fixpunkt  $N_* = 0$  ist asymptotisch stabil, denn

$$\begin{aligned} f_\lambda(N) &= \lambda N - \lambda N^2, \\ f'_\lambda(N) &= \lambda - 2\lambda N, \\ f'_\lambda(N_*) &= \lambda, \quad |f'_\lambda(0)| < 1. \end{aligned}$$

Entsprechend ist dieser Fixpunkt für  $\lambda > 1$  instabil.

**Fall 2:**  $1 < \lambda < 2$ : Es gibt zwei Fixpunkte:  $N_* = 0$  und  $N^* = \frac{\lambda-1}{\lambda}$ . Wenn  $\lambda = 1$ , dann stimmen diese Fixpunkte überein. Der Fixpunkt  $N_* = 0$  ist instabil, und der Fixpunkt  $N^* = \frac{\lambda-1}{\lambda}$  ist stabil, jede Trajektorie mit  $N_0 \neq 0$  konvergiert gegen  $N^*$ . Die Verzweigung bei  $\lambda = 1$  im Fixpunkt-Parameter-Diagramm heißt *transkritische Verzweigung*.

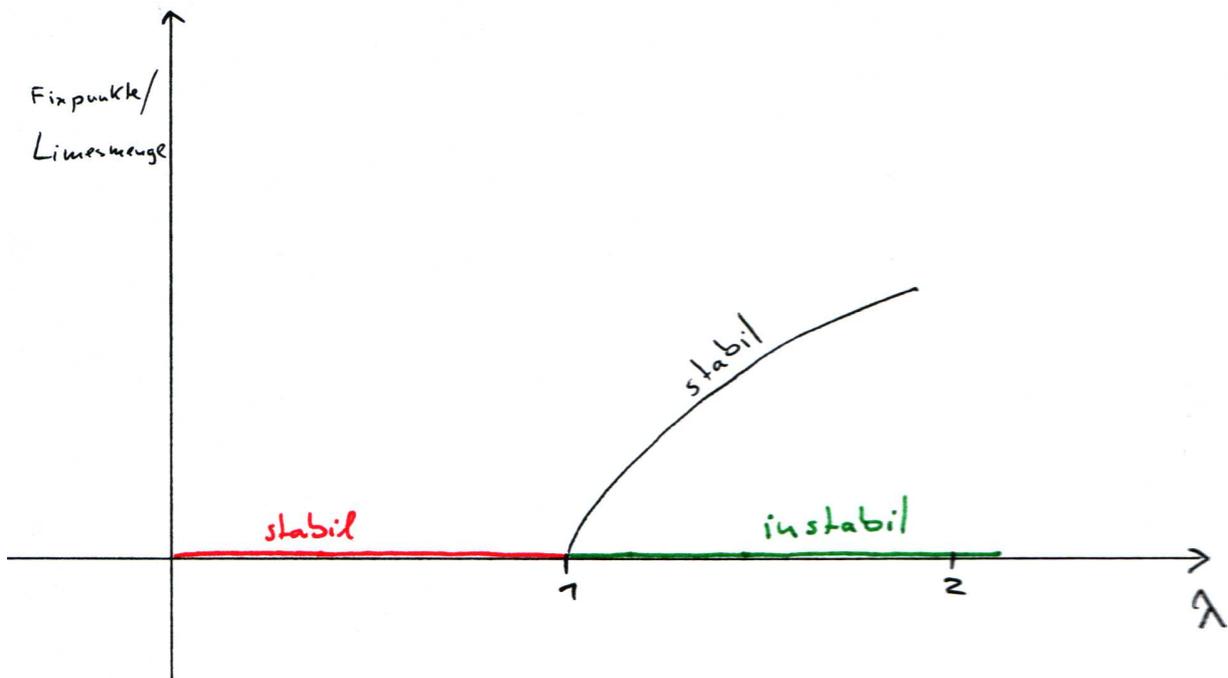


Abbildung 1.4: Transkritische Verzweigung bei  $\lambda = 1$

**Fall 3:**  $2 < \lambda < 3$ : Der Fixpunkt  $N_* = 0$  bleibt instabil, und  $N^* = \frac{\lambda-1}{\lambda}$  bleibt stabil. Allerdings ist die Konvergenz  $\lim_{k \rightarrow \infty} N_k = N^*$  wegen  $f'_\lambda(N^*) = 2 - \lambda < 0$  jetzt oszillatorisch, das heißt, die Werte  $N_k$  sind abwechselnd größer bzw. kleiner als der Grenzwert  $N^*$ .

**Fall 4:**  $3 < \lambda < 1 + \sqrt{6} \approx 3.44949$ : Für  $\lambda > 3$  wird  $N^* = \frac{\lambda-1}{\lambda}$  instabil wegen  $f'_\lambda(N^*) < -1$ . Statt Fixpunkten betrachten wir jetzt 2-periodische Punkte, also Zustände  $N$  mit  $N = (f_\lambda \circ f_\lambda)(N)$ , also

$$N = \lambda f_\lambda(N)(1 - f_\lambda(N)) = \lambda N(1 - N)(1 - \lambda N(1 - N)).$$

Für  $\lambda > \lambda_1 := 3$  erhalten wir zwei Lösungen

$$N_\pm = \frac{\lambda + 1 \pm \sqrt{(\lambda - 1)^2 - 4}}{2\lambda}$$

mit  $N_+ = f_\lambda(N_-)$  und  $N_- = f_\lambda(N_+)$ . Dieser Orbit wird instabil für  $\lambda > \lambda_2 := 1 + \sqrt{6}$ , weil  $(f_\lambda \circ f_\lambda)'(N_\pm) < -1$  für  $\lambda > \lambda_2$ .

Bei  $\lambda_2$  entsteht ein neuer Orbit der Periode 4.

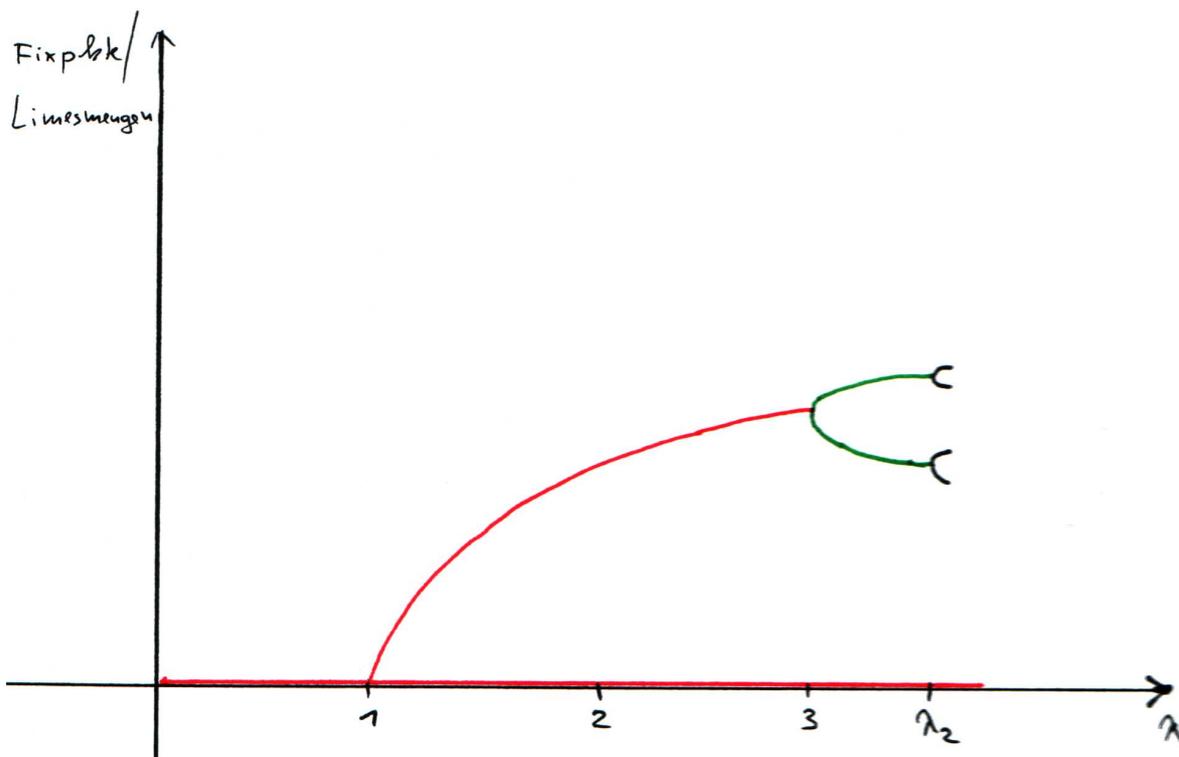


Abbildung 1.5: Periodenverdopplung

In diesem Muster geht es immer weiter, wir reden deshalb auch von Periodenverdopplung (bevor für noch größere  $\lambda$  Chaos einsetzt). FEIGENBAUM hat beobachtet, daß

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\lambda_n - \lambda_{n-1}}{\lambda_{n+1} - \lambda_n} = 4.69920166 \dots$$

Diese Konstante taucht bei verschiedenen Phänomenen mit Periodenverdopplung auf (auch z.B. beim Apfelmännchen) und ist als *Feigenbaumkonstante* bekannt.

## 1.5 Klassifikation ebener linearer Differentialgleichungen

Für gegebene  $a, b, c, d \in \mathbb{R}$  betrachten wir das System linearer Differentialgleichungen

$$\begin{aligned} \dot{x} &= ax + by, \\ \dot{y} &= cx + dy. \end{aligned}$$

Zum Beispiel kann die Schwingungsdifferentialgleichung  $\ddot{z} + \gamma\dot{z} + \omega^2 z = 0$  durch die Transformation  $x = z, y = \dot{z}$  auf diese Gestalt gebracht werden.

Wir schreiben das System als

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},$$

und bestimmen die Eigenwerte von  $A$  zu

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2} \left( S \pm \sqrt{S^2 - 4\Delta} \right),$$

wobei  $S = a + d$  die Spur und  $\Delta = \det A$  die Determinante von  $A$  sind.

Abhängig von diesen beiden Größen unterscheidet sich der entstehende Fluß.

**Fall A:**  $S^2 - 4\Delta > 0$ : Dann sind  $\lambda_1$  und  $\lambda_2$  reell.

**Fall A1:**  $\Delta < 0$ : Wegen  $\lambda_1\lambda_2 = \Delta$  haben dann  $\lambda_1$  und  $\lambda_2$  verschiedene Vorzeichen; der Gleichgewichtspunkt ist  $(x, y) = (0, 0)$ . Beim Bringen auf Jordan-Normalform bekommen wir in den neuen abhängigen Variablen  $(u, v)$  das System  $\dot{u} = \lambda_1 u$ ,  $\dot{v} = \lambda_2 v$  mit den Lösungen  $u(t) = \exp(\lambda_1 t)u_0$  bzw.  $v(t) = \exp(\lambda_2 t)v_0$ . Im Phasenraum erhalten wir dann

$$v(t) = \text{const.} \cdot (u(t))^{\frac{\lambda_2}{\lambda_1}}, \quad \frac{\lambda_2}{\lambda_1} < 0.$$

Der stationäre Punkt wird dann als *Sattelpunkt* bezeichnet.

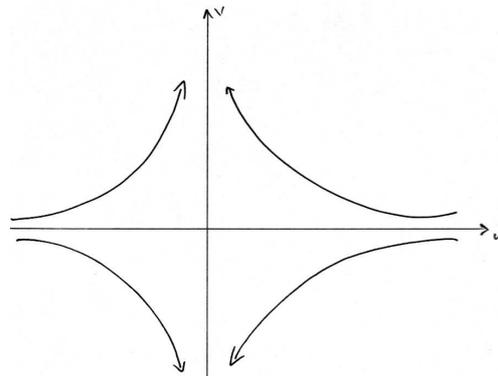


Abbildung 1.6: Sattelpunkt

**Fall A2:**  $\Delta > 0$  und  $S > 0$ : Dann sind  $\lambda_1$  und  $\lambda_2$  beide positiv, wir haben wieder die Darstellung

$$v(t) = \text{const.} \cdot (u(t))^{\frac{\lambda_2}{\lambda_1}}, \quad \frac{\lambda_2}{\lambda_1} > 0,$$

und der stationäre Punkt  $(0, 0)$  ist ein *instabiler Knoten*.

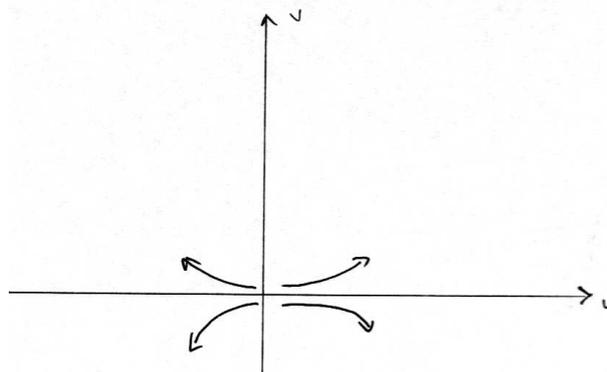


Abbildung 1.7: instabiler Knoten

**Fall A3:**  $\Delta > 0$  und  $S < 0$ : dann sind  $\lambda_1$  und  $\lambda_2$  beide negativ und es liegt ein *stabiler Knoten* vor.

**Fall A4:**  $\Delta = 0$  und  $S > 0$ : dann ist  $\lambda_1 = 0$  und  $\lambda_2 = S > 0$ . Die Ruhelage  $(u, v) = (0, 0)$  ist Teil einer *Linie von instabilen Gleichgewichten*.

**Fall A5:**  $\Delta = 0$  und  $S < 0$ : dann ist  $\lambda_1 = 0$  und  $\lambda_2 = S < 0$ . Die Ruhelage  $(u, v) = (0, 0)$  ist Teil einer *Linie von stabilen Gleichgewichten*.

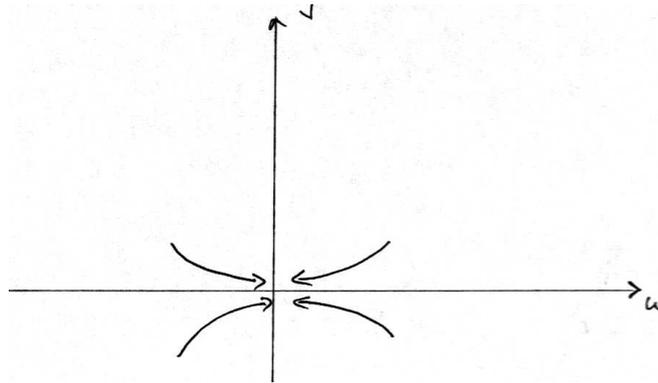


Abbildung 1.8: stabiler Knoten

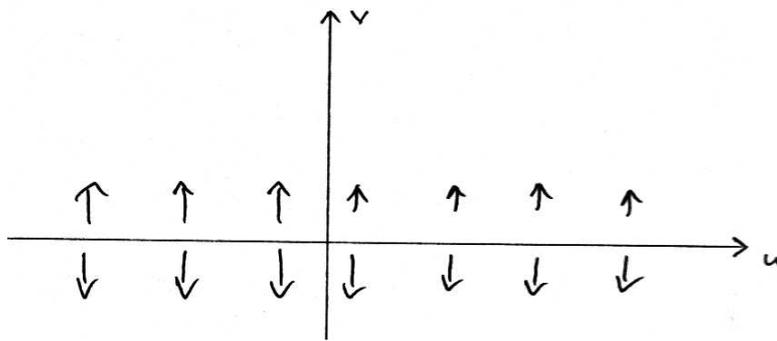


Abbildung 1.9: Linie von instabilen Gleichgewichten

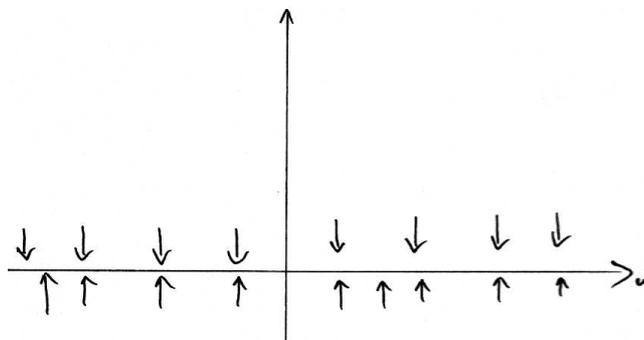


Abbildung 1.10: Linie von stabilen Gleichgewichten

**Fall B:**  $S^2 - 4\Delta < 0$ : dann sind die Eigenwerte  $\lambda_1, \lambda_2$  keine reellen Zahlen. Es gilt aber  $\lambda_1 = \overline{\lambda_2}$ .

**Fall B1:**  $S > 0$  Dann ist  $\Re\lambda_j > 0$ , und wir haben, in gedrehten Koordinaten, eine Darstellung

$$u(t) = u_0 e^{\alpha t} \cos(\omega t), \quad v(t) = v_0 e^{\alpha t} \sin(\omega t), \quad \alpha = \Re\lambda_j > 0.$$

Die Ruhelage  $(u, v) = (0, 0)$  ist ein *instabiler Strudel*.

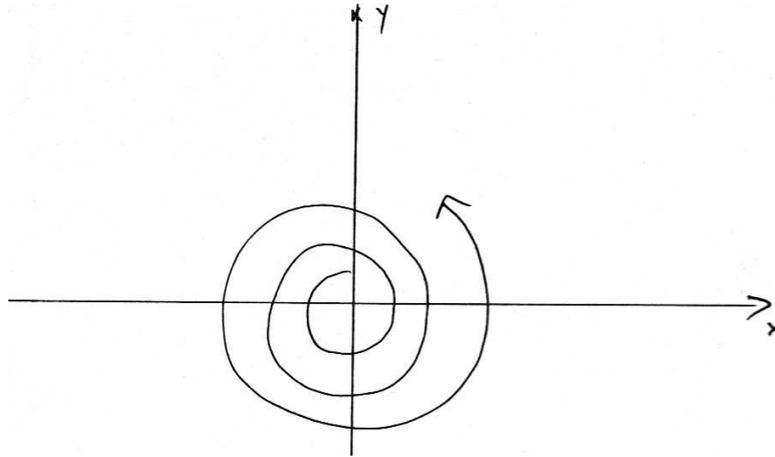


Abbildung 1.11: instabiler Strudel

**Fall B2:**  $S < 0$ : Dann haben wir  $\Re\lambda_j < 0$ , und es liegt ein *stabiler Strudel* vor.

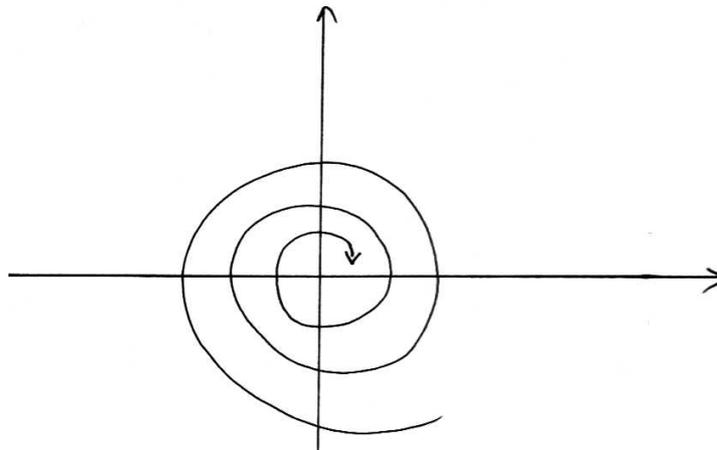


Abbildung 1.12: stabiler Strudel

**Fall B3:**  $S = 0$ : Die Eigenwerte sind  $\lambda_{1,2} = \pm i\sqrt{-\Delta}$ , die Lösungskurven im Phasenraum sind Ellipsen, und die Ruhelage wird als *Zentrum* bezeichnet.

**Fall C:**  $S^2 - 4\Delta = 0$ :

**Fall C1:**  $S > 0$  Dann hat  $A$  einen Eigenwert  $\lambda > 0$  mit algebraischer Vielfachheit 2 und geometrischer Vielfachheit von 1 oder 2 (den letzteren Fall wollen wir ignorieren). Nach Übergang zur Jordan-Normalform bekommen wir

$$u(t) = e^{\lambda t} u_0 + t e^{\lambda t} v_0, \quad v(t) = e^{\lambda t} v_0,$$

und die Ruhelage  $(u, v) = (0, 0)$  heißt *entarteter instabiler Knoten*.

**Fall C2:**  $S < 0$ : Nun ist  $\lambda < 0$ , und die Ruhelage  $(u, v) = (0, 0)$  heißt jetzt *entarteter stabiler Knoten*.

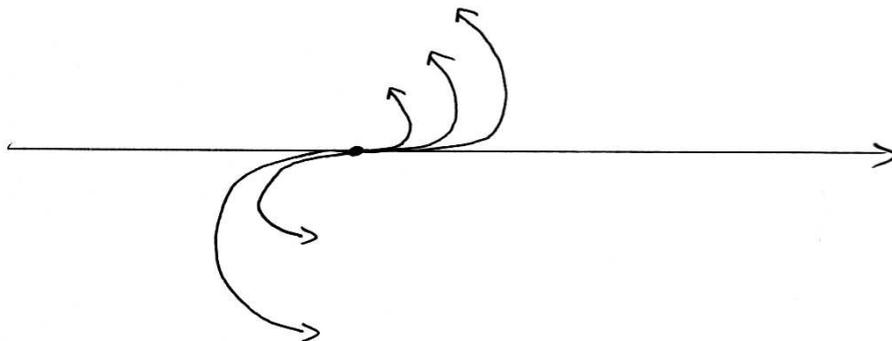


Abbildung 1.13: entarteter instabiler Knoten

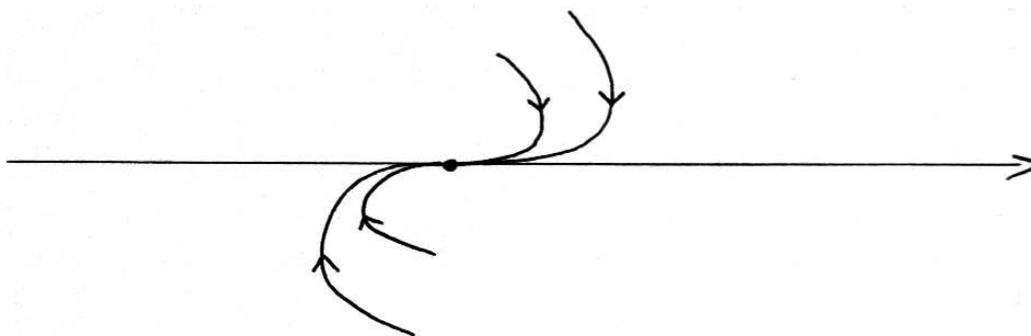


Abbildung 1.14: entarteter stabiler Knoten

## 1.6 Wronski-Determinanten und der Satz von Liouville

Für  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  betrachten wir das System

$$\dot{x}(t) = Ax(t), \quad x(0) = x_0.$$

Sei  $Y = Y(t)$  die Lösung zu

$$\dot{Y}(t) = AY(t), \quad Y(0) = I_n,$$

dann ist  $x(t) = Y(t)x_0$ .

**Definition 1.12.** Die Funktion  $W = W(t) = \det Y(t)$  heißt WRONSKIdeterminante.

Aus der Vorlesung über gewöhnliche Differentialgleichungen ist folgendes Resultat bekannt (das auch für variable Matrizen  $A = A(t)$  gilt):

**Satz 1.13.** Es gilt  $\dot{W}(t) = (\text{spur } A)W(t)$  und  $W(0) = 1$ .

Insbesondere haben wir damit

$$W(t) = \exp\left(\int_{s=0}^t \text{spur } A(s) \, ds\right).$$

Jetzt wollen wir untersuchen, wie die obige Funktion  $x = x(t)$  vom Anfangswert  $x_0$  abhängt:

**Satz 1.14.** Sei  $f: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  stetig differenzierbar, und sei  $x = x(t; x_0)$  die Lösung von

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= f(t, x(t)), & -\varepsilon \leq t \leq \varepsilon, \\ x(0) &= x_0. \end{aligned}$$

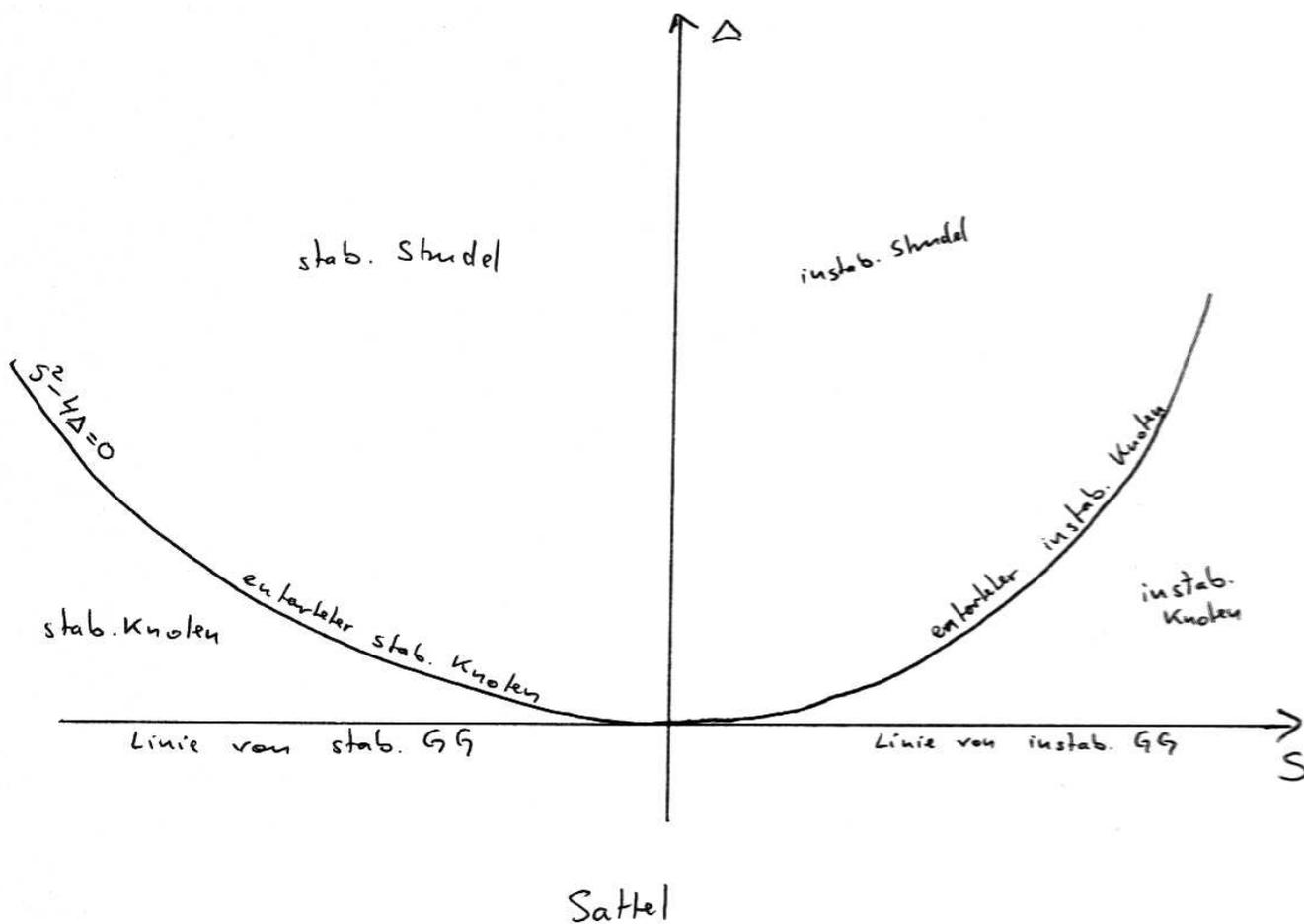


Abbildung 1.15: Klassifikation ebener Differentialgleichungen

Dann existiert die Ableitung  $\frac{\partial x(t; x_0)}{\partial x_0} \in C^1([-\varepsilon, \varepsilon], \mathbb{R}^{n \times n})$ , und sie löst die Matrix-Differentialgleichung

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial x(t; x_0)}{\partial x_0} \right) = (f_x(t, x(t; x_0))) \left( \frac{\partial x(t; x_0)}{\partial x_0} \right)$$

mit  $f_x$  als  $n \times n$  Jacobi-Matrix, und mit dem Anfangswert

$$\left( \frac{\partial x(t; x_0)}{\partial x_0} \right) \Big|_{t=0} = I_n.$$

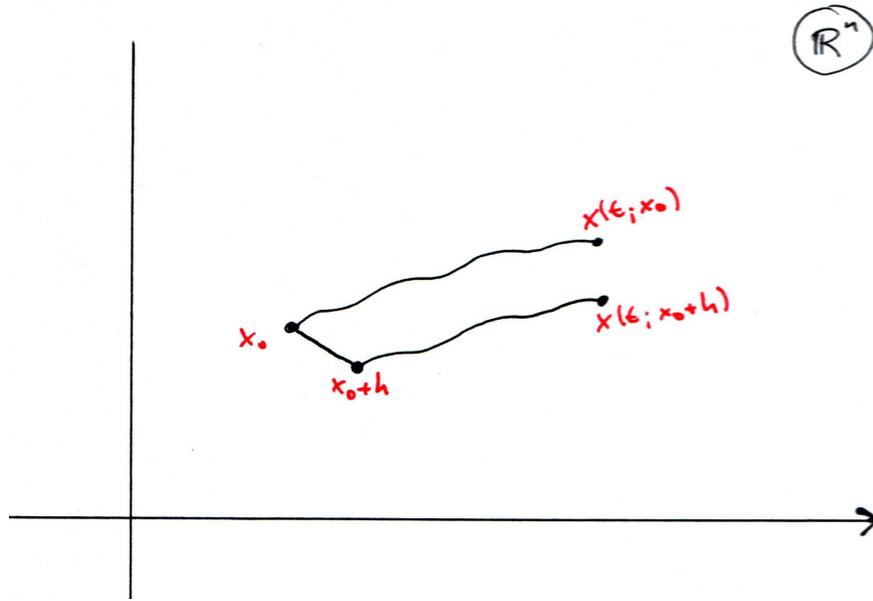


Abbildung 1.16: Differentiation nach Anfangswerten

*Beweis.* Sei  $h \in \mathbb{R}^n$  mit  $\|h\| \ll 1$ . Wir setzen

$$x_h(t; x_0) := x(t; x_0 + h) - x(t; x_0)$$

und wollen das Verhalten für  $h \rightarrow 0$  untersuchen. Nun ist mit dem Mittelwertsatz für vektorwertige Funktionen

$$\begin{aligned} \dot{x}_h(t; x_0) &= \dot{x}(t; x_0 + h) - \dot{x}(t; x_0) \\ &= f(t, x(t; x_0 + h)) - f(t, x(t; x_0)) \\ &= \left( \int_{\theta=0}^1 f_x(t, x(t; x_0) + \theta(x(t; x_0 + h) - x(t; x_0))) \, d\theta \right) \cdot (x(t; x_0 + h) - x(t; x_0)) \\ &= \left( \int_{\theta=0}^1 f_x(t, x(t; x_0) + \theta x_h(t; x_0)) \, d\theta \right) \cdot x_h(t; x_0) \\ &=: V_h(t, x_0) x_h(t; x_0), \end{aligned}$$

wobei  $V_h = \int_{\theta=0}^1 \dots \, d\theta$  für  $\|h\| \ll 1$ . Insgesamt erhalten wir also

$$\begin{aligned} \dot{x}_h(t; x_0) &= V_h(t, x_0) x_h(t; x_0), \quad -\varepsilon \leq t \leq \varepsilon, \\ x_h(0, x_0) &= h. \end{aligned}$$

Andererseits wissen wir, daß die Matrix-Differentialgleichung

$$\begin{aligned} \dot{Y}_h(t) &= V_h(t, x_0) Y_h(t), \quad -\varepsilon \leq t \leq \varepsilon, \\ Y_h(0) &= I_h \end{aligned}$$

eine eindeutige Lösung  $Y_h: [-\varepsilon, \varepsilon] \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$  besitzt, die stetig vom Parameter  $h$  abhängt. Also ist

$$x_h(t; x_0) = Y_h(t)h.$$

Nun zeigen wir, daß  $Y_0(t)$  die gesuchte Ableitung  $\frac{\partial x(t; x_0)}{\partial x_0}$  ist:

$$\begin{aligned} \|x(t; x_0 + h) - x(t; x_0) - Y_0(t)h\|_{\mathbb{R}^n} &= \|x_h(t; x_0) - Y_0(t)h\|_{\mathbb{R}^n} \\ &= \|Y_h(t)h - Y_0(t)h\|_{\mathbb{R}^n} \leq \|Y_h(t) - Y_0(t)\|_{\mathbb{R}^{n \times n}} \|h\|_{\mathbb{R}^n} \\ &= o(\|h\|_{\mathbb{R}^n}), \end{aligned}$$

weil  $Y_h$  stetig von  $h$  abhängt.

Wegen  $V_0(t) = f_x(t, x(t; x_0))$  ist die Matrix-Differentialgleichung für  $Y_0$  genau die gesuchte Differentialgleichung.  $\square$

Eine erste Anwendung ist der Satz von Liouville über die Änderung des Phasenraumvolumens:

**Satz 1.15 (Liouville).** *Sei  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n \in C^1$ , und sei  $\Phi_t$  der Fluß zur Differentialgleichung  $\dot{x} = f(x)$ , das heißt, die Funktion  $x = x(t) = \Phi_t(y)$  löst das Anfangswertproblem*

$$\dot{x}(t) = f(x(t)), \quad x(0) = y.$$

*Sei  $V \subset \mathbb{R}^n$  ein beschränktes Gebiet mit glattem Rand, und  $\Phi_t(V)$  sei das Bild von  $V$  unter dem Fluß  $\Phi_t$ .*

*Dann gilt*

$$\frac{d}{dt} \text{vol}(\Phi_t(V)) = \int_{x \in \Phi_t(V)} \text{div} f(x) \, dx.$$

*Beweis.* Wegen des Transformationssatzes mit  $x = \Phi_t(y)$  haben wir

$$\text{vol}(\Phi_t(V)) = \int_{x \in \Phi_t(V)} 1 \, dx = \int_{y \in V} \det \left( \frac{\partial \Phi_t(y)}{\partial y} \right) \, dy.$$

Wir wissen: die Funktion  $t \mapsto \Phi_t(y)$  löst das Anfangswertproblem

$$\dot{x}(t) = f(x(t)), \quad x(0) = y.$$

Nach dem vorigen Satz löst dann  $\frac{\partial \Phi_t(y)}{\partial y}$  die Matrix-Differentialgleichung

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \Phi_t(y)}{\partial y} \right) &= f_x(x(t)) \left( \frac{\partial \Phi_t(y)}{\partial y} \right) \quad \text{mit } x(t) = \Phi_t(y), \\ \left( \frac{\partial \Phi_t(y)}{\partial y} \right) \Big|_{t=0} &= I_n. \end{aligned}$$

Aus dem Satz über die Wronski-Determinante folgt dann, mit  $A(t) = f_x(x(t))$ ,

$$\frac{d}{dt} \left( \det \left( \frac{\partial \Phi_t(y)}{\partial y} \right) \right) = (\text{spur } A(t)) \left( \det \left( \frac{\partial \Phi_t(y)}{\partial y} \right) \right),$$

und somit haben wir

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \text{vol}(\Phi_t(V)) &= \int_{y \in V} \frac{d}{dt} \left( \det \left( \frac{\partial \Phi_t(y)}{\partial y} \right) \right) \, dy \\ &= \int_{y \in V} (\text{spur } f_x(\Phi_t(y))) \det \left( \frac{\partial \Phi_t(y)}{\partial y} \right) \, dy \\ &= \int_{x \in \Phi_t(V)} \text{div} f(x) \, dx, \end{aligned}$$

aufgrund des Transformationssatzes mit  $x = \Phi_t(y)$ .  $\square$

**Folgerung 1.16.** Sei  $df \equiv 0$  global. Dann bleibt das Phasenraumvolumen erhalten:

$$\text{vol}(\Phi_t(V)) = \text{vol}(V) \quad t \in \mathbb{R}.$$

**Beispiel:** Sei  $H = H(q, p): \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}$  eine stetig differenzierbare Funktion, und betrachte das System

$$\dot{p} = -\nabla_q H,$$

$$\dot{q} = \nabla_p H.$$

Dann ist der Fluß  $\Phi_t: (q(0), p(0)) \mapsto (q(t), p(t))$  volumenerhaltend, denn es ist

$$\text{div } f = \sum_{j=1}^n \frac{\partial}{\partial p_j} \left( -\frac{\partial H}{\partial q_j} \right) + \sum_{j=1}^n \frac{\partial}{\partial q_j} \left( \frac{\partial H}{\partial p_j} \right) = 0.$$

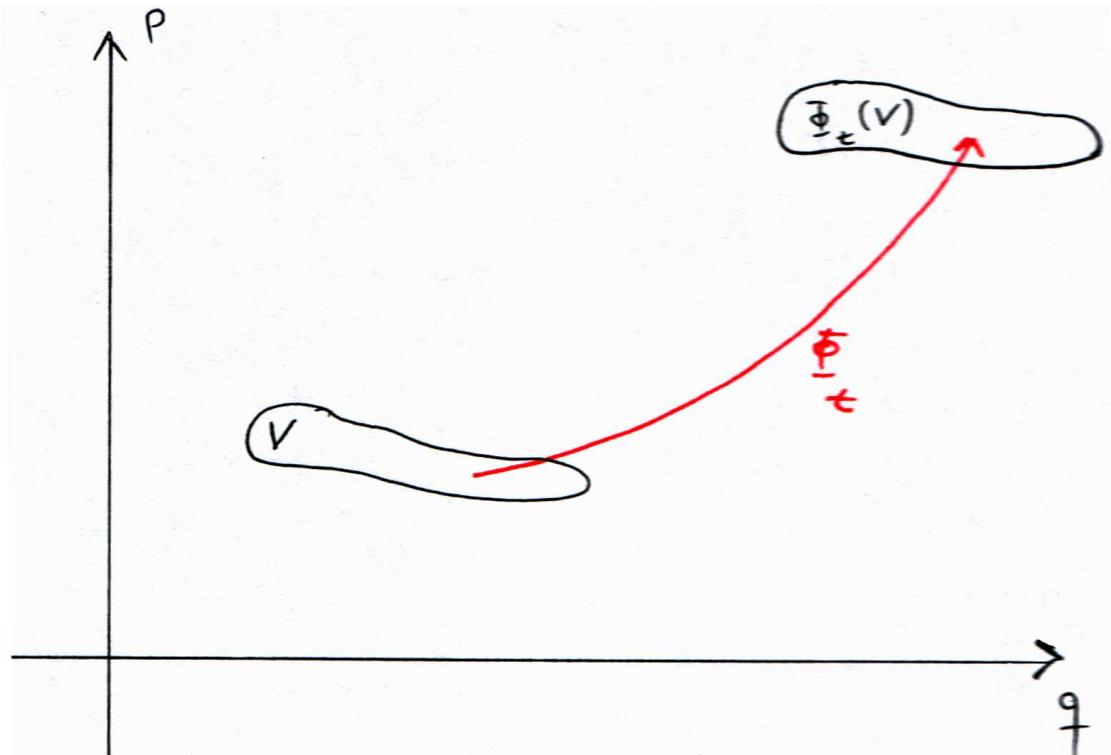


Abbildung 1.17: Erhaltung des Phasenraumvolumens

**Beispiel:** Sei z.B.  $H(q, p) = \frac{1}{2m}p^2 + V(q)$  mit  $p^2 = \sum_{j=1}^n p_j^2$ . Dann folgt  $\dot{p} = -\nabla V(q)$  und  $m\dot{q} = p$ . Wir interpretieren  $F(q) = -\nabla V(q)$  als Kraft mit Potential  $V$  und erhalten dann das dritte Newtonsche Axiom:

$$m\ddot{q} = F(q),$$

mit  $q$  als Ortsvariable und  $p$  als Impulsvariable.

**Beispiel:** Das folgende System erhielt LORENZ 1963 beim starken Vereinfachen eines Modells aus der Meteorologie:

$$\dot{x} = \sigma(y - x),$$

$$\dot{y} = \rho x - y - xz,$$

$$\dot{z} = -\beta z + xy.$$

Typische Werte für die Parameter sind  $\sigma = 10$ ,  $\beta = \frac{8}{3}$  und  $\rho = 28$ . Dann erhalten wir  $\text{div } f = -\sigma - 1 - \beta =: -\gamma < 0$ , und es folgt

$$\frac{d}{dt} \text{vol}(\Phi_t(V)) = -\gamma \text{vol}(\Phi_t(V));$$

die Volumina des Phasenraums werden also exponentiell kontrahiert. Es folgt, daß der Lorenz-Attraktor das dreidimensionale Lebesgue-Maß Null haben muß.

**Satz 1.17 (Wiederkehrsatz von POINCARÉ).** *Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  ein beschränktes Gebiet, und sei  $\Phi: \Omega \rightarrow \Omega$  ein volumenerhaltender Homöomorphismus. Dann gilt: Für jedes  $x \in \Omega$  und jede Umgebung  $U$  von  $x$ , für jedes  $n_0 \in \mathbb{N}$  gibt es ein  $y \in U$  und ein  $n \geq n_0$  mit  $\Phi^n(y) \in U$ .*

*Mit anderen Worten: der Orbit von  $y$  kehrt in die Nähe von  $x$  zurück.*

*Beweis.* Wir haben  $\text{vol}(\Phi^n(U)) = \text{vol}(U)$  für jedes  $n \in \mathbb{N}$ . Also sind die Mengen  $\Phi^{n_0}(U)$ ,  $\Phi^{2n_0}(U)$ ,  $\Phi^{3n_0}(U)$ , ... nicht alle disjunkt, denn  $\Omega$  ist beschränkt. Also gibt es  $k$  und  $l \in \mathbb{N}$  mit  $\Phi^{kn_0}(U) \cap \Phi^{ln_0}(U) \neq \emptyset$ . OBdA können wir  $k > l$  annehmen. Es gibt also  $y, z \in U$  mit  $\Phi^{kn_0}(y) = \Phi^{ln_0}(z)$ , also  $z = \Phi^{(k-l)n_0}(y) \in U$ .  $\square$

Dieser Wiederkehrsatz gilt insbesondere z.B. für Hamiltonsche Flüsse auf kompakten Mannigfaltigkeiten.

## 1.7 Stabilität von periodischen Lösungen

Es soll um folgendes gehen: wir betrachten das dynamische System zum Anfangswertproblem

$$\dot{z} = f(z), \quad z(0) = z_0.$$

Sei  $z = z(t)$  eine Lösung, die einen periodischen Orbit durchläuft. Wir wollen wissen, wie sich die Lösung ändert, wenn wir  $z_0$  etwas verschieben. Im Sinne einer Linearisierung an der Lösung  $z = z(t)$  betrachten wir also

$$x(t) := \frac{\partial z(t; z_0)}{\partial z_0},$$

was eine Lösung der Matrixdifferentialgleichung  $\dot{x} = f'(z(t; z_0))x(t)$  ist. Und hierbei ist nun die Funktion  $t \mapsto f'(z(t; z_0))$  eine stetige periodische Matrixfunktion.

Etwas allgemeiner betrachten wir also

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A(t)x(t), \\ x(t_0) &= x_0 \end{aligned}$$

mit  $A(t+p) = A(t)$  für ein  $p > 0$ . Wir schreiben  $x(t) = \Phi(t, t_0)x_0$  und bezeichnen  $\Phi$  als *Übergangsmatrix*. Es ist klar, daß folgendes gilt:

$$\begin{aligned} \Phi(t, t_1) \circ \Phi(t_1, t_0) &= \Phi(t, t_0), \\ \Phi(t, t) &= I_n. \end{aligned}$$

Aus dem Satz über die Wronski-Determinante haben wir weiterhin

$$\det \Phi(t, t_0) = \exp \left( \int_{s=t_0}^t \text{spur } A(s) \, ds \right).$$

**Satz 1.18.** *Sei  $A(t+p) = A(t)$  für alle  $t \in \mathbb{R}$ . Dann ist  $\Phi(t+p, s+p) = \Phi(t, s)$ .*

*Beweis.* Die Funktionen  $t \mapsto \Phi(t, s)$  und  $t \mapsto \Phi(t+p, s+p)$  sind beide Lösungen des Anfangswertproblems

$$\begin{aligned} \dot{\Psi}(t) &= A(t)\Psi(t), \\ \Psi(s) &= I_n. \end{aligned}$$

Also müssen sie gleich sein.  $\square$

Der folgende berühmte Satz beschreibt uns die Struktur der Übergangsmatrix:

**Satz 1.19 (FLOQUET).** Sei  $A = A(t) \in \mathbb{C}^{n \times n}$  stetig mit Periode  $p$ . Dann gibt es eine  $p$ -periodische Matrixfunktion  $Z = Z(t)$  und eine konstante Matrix  $B \in \mathbb{C}^{n \times n}$ , sodaß

$$\Phi(t, 0) = Z(t) \exp(Bt), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Dann haben wir allgemeiner

$$\begin{aligned} \Phi(t, s) &= \Phi(t, 0)\Phi(0, s) = \Phi(t, 0)(\Phi(s, 0))^s = Z(t) \exp(Bt) (Z(s) \exp(Bs))^{-1} \\ &= Z(t) \exp(B(t-s))(Z(s))^{-1}. \end{aligned}$$

*Beweis.* Zunächst ist  $Z(0) = I_n$ . Wenn  $Z$  die Periode  $p$  hat, dann muß gelten

$$\exp(Bp) = \Phi(p, 0) =: C$$

Gesucht ist also zuerst eine Matrix  $B$ , die diese Gleichung löst.

Wir wissen: die Matrix  $C$  ist invertierbar, denn  $\det \Phi(t, 0)$  ist eine Wronski-Determinante, also niemals gleich 0.

Wir bringen  $C$  in Jordan-Normalform:

$$C = S^{-1}(\Lambda + N)S,$$

wobei  $\Lambda$  die Diagonalmatrix der Eigenwerte  $\lambda_j$  ist, und  $N$  eine Nebendiagonalmatrix mit eventuellen Einsen darstellt. Wir haben  $\Lambda N = N\Lambda$ . Weil 0 kein Eigenwert von  $C$  ist, muß die Matrix  $\Lambda$  invertierbar sein. Dann gibt es eine Diagonalmatrix  $\Gamma$  mit

$$\lambda_j = \exp(\gamma_j), \quad j = 1, \dots, n.$$

Diese  $\gamma_j$  sind eindeutig bestimmt bis auf Vielfache von  $2\pi i$ .

Wir wollen den „Logarithmus“ von  $C$  bilden. Dafür beachten wir  $\Lambda + N = \Lambda(I_n + \Lambda^{-1}N)$  und definieren

$$L^* := \log(I_n + \Lambda^{-1}N) := \sum_{j=1}^{\infty} (-1)^{j-1} \frac{1}{j} (\Lambda^{-1}N)^j.$$

Man beachte dabei, daß wegen  $(\Lambda^{-1}N)^n = 0$  nur endlich viele Summanden in der Summe auftauchen, weshalb Konvergenzfragen sich nicht stellen.

Nun wollen wir zeigen, daß  $\exp(L^*) = I_n + \Lambda^{-1}N$  gilt. Für den Beweis dazu definieren wir etwas allgemeiner

$$L(\tau) = \sum_{j=1}^{\infty} (-1)^{j-1} \frac{1}{j} (\tau \Lambda^{-1}N)^j, \quad \tau \in \mathbb{R},$$

und stellen fest, daß  $L(0) = 0$  sowie

$$\begin{aligned} L'(\tau) &= \sum_{j=1}^{\infty} (-1)^{j-1} \tau^{j-1} (\Lambda^{-1}N)^j = \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \tau^m (\Lambda^{-1}N)^{m+1} \\ &= \left( \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m (\tau \Lambda^{-1}N)^m \right) (\Lambda^{-1}N) = (I_n + \tau \Lambda^{-1}N)^{-1} (\Lambda^{-1}N). \end{aligned}$$

Die letzte Gleichung kann man verifizieren, indem man von links mit  $(I_n + \tau \Lambda^{-1}N)$  multipliziert und sich an der Auslöschung von Summanden erfreut.

Schließlich ist  $L''(\tau) = -(I_n + \tau \Lambda^{-1}N)^{-2} (\Lambda^{-1}N)^2 = -L'(\tau)L'(\tau)$ .

Nun setzen wir  $K(\tau) = \exp(L(\tau))$  und stellen fest, daß

$$\begin{aligned} K(0) &= I_n, \\ K'(\tau) &= \exp(L(\tau))L'(\tau), \quad K'(0) = \Lambda^{-1}N, \\ K''(\tau) &= \exp(L(\tau))L'(\tau)L'(\tau) + \exp(L(\tau))L''(\tau) = 0, \end{aligned}$$

also muß  $K'(\tau)$  konstant sein, also  $K(\tau)L'(\tau) = K'(\tau) = K'(0) = (\Lambda^{-1}N)$  für alle  $\tau$ , und somit ist

$$K(\tau) = (\Lambda^{-1}N)(L'(\tau))^{-1} = (\Lambda^{-1}N)(\Lambda^{-1}N)^{-1}(I_n + \tau\Lambda^{-1}N) = I_n + \tau\Lambda^{-1}N.$$

Wir setzen  $\tau = 1$  und haben die gewünschte Identität  $\exp(L^*) = I_n + \Lambda^{-1}N$ .

Nun ist mit  $\Lambda = \exp(\Gamma)$

$$C = S^{-1}\Lambda(I_n + \Lambda^{-1}N)S = S^{-1}\exp(\Gamma)\exp(L^*)S.$$

Wir wollen die beiden  $\exp$ -Terme zusammenfassen. Dazu beachten wir, daß  $L^*$  eine Blockdiagonalform hat und daß  $\Gamma$  auf jedem dieser Blöcke ein Vielfaches einer kleinen Einheitsmatrix ist. Also gilt  $\Gamma L^* = L^* \Gamma$ , und deshalb  $\exp(\Gamma + L^*) = \exp(\Gamma)\exp(L^*)$ . Nun ist schließlich

$$\begin{aligned} \exp(S^{-1}(\Gamma + L^*)S) &= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} (S^{-1}(\Gamma + L^*)S)^j = S^{-1} \left( \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} (\Gamma + L^*)^j \right) S \\ &= S^{-1} \exp(\Gamma + L^*)S = C, \end{aligned}$$

und damit lautet die gesuchte Matrix

$$B = \frac{1}{p} S^{-1}(\Gamma + L^*)S.$$

Die Eindeutigkeit von  $B$  ist noch nicht geklärt, aber wir haben gezeigt, daß  $\exp(Bp) = \Phi(p, 0)$ .

Nun definieren wir  $Z(t) = \Phi(t, 0) \exp(-Bt)$ , und es gilt tatsächlich

$$\begin{aligned} Z(t+p) &= \Phi(t+p, 0) \exp(-B(t+p)) = \Phi(t, -p) \exp(-Bp) \exp(-Bt) \\ &= \Phi(t, -p) (\Phi(p, 0))^{-1} \exp(-Bt) = \Phi(t, -p) \Phi(0, p) \exp(-Bt) \\ &= \Phi(t, -p) \Phi(-p, 0) \exp(-Bt) \\ &= \Phi(t, 0) \exp(-Bt) = Z(t). \end{aligned}$$

□

**Definition 1.20.** Die Eigenwerte von  $B$ , das heißt  $\mu_1, \dots, \mu_n$ , heißen FLOQUET-Exponenten und sind eindeutig bestimmt bis auf Vielfache von  $\frac{1}{p}2\pi i$ .

Die Eigenwerte von  $\Phi(p, 0)$ , also  $e^{\mu_1}, \dots, e^{\mu_n}$ , heißen FLOQUET-Multiplikatoren und sind eindeutig bestimmt.

**Folgerung 1.21.** Wir betrachten das dynamische System zur Differentialgleichung  $\dot{x}(t) = A(t)x(t)$  mit  $p$ -periodischer Matrix  $A$ . Dann gilt:

Die Ruhelage  $x = 0$  ist stabil genau dann, wenn alle Floquet-Exponenten  $\mu_j$  einen Realteil  $\leq 0$  haben, und für  $\mu_j \in i\mathbb{R}$  stimmen geometrische und algebraische Vielfachheit überein.

Die Ruhelage  $x = 0$  ist asymptotisch stabil genau dann, wenn alle Floquet-Exponenten  $\mu_j$  einen negativen Realteil haben.

Die Ruhelage  $x = 0$  ist asymptotisch stabil genau dann, wenn alle Floquet-Multiplikatoren im Inneren des komplexen Einheitskreises liegen.

**Bemerkung 1.22.** Als Warnung: die Lage der Eigenwerte von  $B$  ergibt sich nicht direkt aus der Lage der Eigenwerte von  $A$ . Es kann sein, daß alle Eigenwerte von  $A$  zu jeder Zeit in der linken Halbebene liegen, aber trotzdem besitzt  $B$  einen Eigenwert mit positivem Realteil.

Als Beispiel<sup>1</sup> betrachten wir verschiedene Pendel. Es ist bekannt, daß die Auslenkung eines gewöhnlichen Pendels (für kleine Amplituden) durch die Differentialgleichung  $\ddot{x} = -\omega^2 x$  beschrieben werden kann, wobei  $\omega^2 = g/l$  mit der Erdbeschleunigung  $g$  und Pendellänge  $l$ . Naturgemäß ist die Ruhelage „Pendel unten“ stabil.

<sup>1</sup>Siehe dazu auch [2], Kapitel 28.

Und für ein „nach oben zeigendes Pendel“ ergibt sich die Differentialgleichung  $\ddot{x} = \omega^2 x$ , mit einer instabilen Ruhelage „Pendel genau senkrecht nach oben“. Es ist interessant, daß man das Pendel stabilisieren kann, wenn man den Unterstützungspunkt vertikal vibrieren läßt, mit geeigneter Frequenz und Amplitude.

Dazu nehmen wir an, daß der Unterstützungspunkt periodisch (mit der Periodendauer  $2\tau$ ) nach oben bzw. unten mit der Beschleunigung  $c$  bewegt wird. Dann erhalten wir die Differentialgleichung

$$\ddot{x}(t) = (\omega^2 + h(t))x(t),$$

wobei

$$h(t) = \begin{cases} -\alpha^2 & : 0 < t < \tau, \\ +\alpha^2 & : \tau < t < 2\tau, \end{cases}$$

und  $\alpha^2 = \frac{c}{l}$ . Die Amplitude dieser Vibrationen bezeichnen wir mit  $a$ . Die maximalen Auslenkungspunkte werden für  $t = \tau/2$  bzw.  $t = 3\tau/2$  angenommen, mit periodischer Fortsetzung der Periode  $2\tau$ . Also gilt dann

$$a = \frac{c}{2} \left(\frac{\tau}{2}\right)^2 = \frac{c\tau^2}{8}, \quad \alpha^2 = \frac{c}{l} = \frac{8a}{l\tau^2}.$$

Im folgenden wählen wir  $a$  und  $\alpha$  geeignet, daraus ergibt sich dann  $\tau$ .

Wir wissen: für  $a = 0$  ist die Ruhelage  $x = 0$  ein Sattelpunkt mit Eigenwerten  $\pm\omega$ , also instabil.

Um ein System erster Ordnung zu erhalten, setzen wir  $y = x$  und  $z = \dot{x}$ , was uns auf

$$\begin{pmatrix} \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \omega^2 + h(t) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix} = A(t) \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix}$$

führt. Leider besitzt die Matrix  $A$  als Funktion von  $t$  Sprungunstetigkeiten, aber das wollen wir hier ignorieren.

Wenn  $\omega^2 + h(t) \geq 0$ , dann hat  $A$  zwei reelle Eigenwerte.

Wenn  $\omega^2 + h(t) < 0$ , dann hat  $A$  zwei imaginäre Eigenwerte.

Die Summe der Eigenwerte von  $A$  ist in jedem Falle gleich Null. Um Stabilität zu erzielen, liegt es nahe, daß wenigstens zu gewissen Zeiten  $A(t)$  keinen Eigenwert in der rechten Halbebene haben sollte, also verlangen wir

$$\alpha^2 > \omega^2.$$

Die Übergangsmatrix bestimmen wir zu

$$\Phi(2\tau, 0) = \Phi(2\tau, \tau)\Phi(\tau, 0) = \begin{pmatrix} \cosh k\tau & \frac{1}{k} \sinh k\tau \\ k \sinh k\tau & \cosh k\tau \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \Omega\tau & \frac{1}{\Omega} \sin \Omega\tau \\ -\Omega \sin \Omega\tau & \cos \Omega\tau \end{pmatrix},$$

wobei  $k^2 = \alpha^2 + \omega^2$  und  $\Omega^2 = \alpha^2 - \omega^2$ .

Wir suchen jetzt die Eigenwerte von  $\Phi(2\tau, 0)$ . Weil  $\text{spur } A(t) = 0$  für jedes  $t$ , haben wir mit dem Satz über die Wronskideterminanten  $\det \Phi(t, t_0) = 1$  für alle  $t, t_0$ , insbesondere also  $\det \Phi(2\tau, 0) = 1$ , und somit  $\lambda_+ \cdot \lambda_- = 1$ . Damit sind die Eigenwerte gleich

$$\lambda_{\pm} = \frac{1}{2} \left( \text{spur } \Phi(2\tau, 0) \pm \sqrt{(\text{spur } \Phi(2\tau, 0))^2 - 4} \right).$$

Für das Ziel  $|\lambda_{\pm}| \leq 1$  brauchen wir demnach  $|\text{spur } \Phi(2\tau, 0)| \leq 2$ , was nach einiger Rechnung sich als äquivalent zu

$$\left| 2 \cosh(k\tau) \cos(\Omega\tau) + \left( \frac{k}{\Omega} - \frac{\Omega}{k} \right) \sinh(k\tau) \sinh(\Omega\tau) \right| \leq 2$$

erweist. Nun machen wir folgende Annahmen:

$$\frac{a}{l} =: \varepsilon^2 \ll 1, \quad \frac{g}{c} =: \mu^2 \ll 1,$$

und bekommen dann

$$\begin{aligned} k\tau &= \sqrt{\alpha^2 + \omega^2} \sqrt{\frac{8a}{c}} = \sqrt{8} \sqrt{\frac{c}{l} + \frac{g}{l}} \sqrt{\frac{a}{c}} = 2\sqrt{2} \sqrt{\frac{a}{l} + \frac{a}{l} \cdot \frac{g}{c}} = 2\sqrt{2}\varepsilon \sqrt{1 + \mu^2}, \\ \Omega\tau &= \sqrt{\alpha^2 - \omega^2} \sqrt{\frac{8a}{c}} = \sqrt{8} \sqrt{\frac{c}{l} - \frac{g}{l}} \sqrt{\frac{a}{c}} = 2\sqrt{2} \sqrt{\frac{a}{l} - \frac{a}{l} \cdot \frac{g}{c}} = 2\sqrt{2}\varepsilon \sqrt{1 - \mu^2}, \\ \frac{k}{\Omega} &= \frac{\sqrt{1 + \mu^2}}{\sqrt{1 - \mu^2}} = \frac{1 + \frac{1}{2}\mu^2}{1 - \frac{1}{2}\mu^2} + \mathcal{O}(\mu^4) = 1 + \mu^2 + \mathcal{O}(\mu^4). \end{aligned}$$

Daraus ergibt sich dann direkt

$$\begin{aligned} \frac{k}{\Omega} - \frac{\Omega}{k} &= 2\mu^2 + \mathcal{O}(\mu^4), \\ \cosh(k\tau) &= 1 + 4\varepsilon^2(1 + \mu^2) + \frac{8}{3}\varepsilon^4 + \mathcal{O}(\mu^6 + \varepsilon^6), \\ \cos(\Omega\tau) &= 1 - 4\varepsilon^2(1 - \mu^2) + \frac{8}{3}\varepsilon^4 + \mathcal{O}(\mu^6 + \varepsilon^6), \\ \left(\frac{k}{\Omega} - \frac{\Omega}{k}\right) \sinh(k\tau) \sin(\Omega\tau) &= 16\varepsilon^2\mu^2 + \mathcal{O}(\mu^6 + \varepsilon^6), \end{aligned}$$

und somit müssen wir dafür sorgen, daß

$$2 \left( 1 + 8\varepsilon^2\mu^2 + \frac{16}{3}\varepsilon^4 - 16\varepsilon^4 \right) + 16\varepsilon^2\mu^2 < 2,$$

oder  $3\mu^2 < \varepsilon^2$  oder  $\frac{g}{c} < \frac{a}{3l}$  oder  $\tau^2 < \frac{8a^2}{3lg}$ .

Für  $l = 20\text{cm}$ ,  $a = 1\text{cm}$  würde das bedeuten  $\tau < 0.01166$ , also eine Vibrationsfrequenz von mindestens 43Hz.

Wir überlassen nun das kopfstehende Pendel sich selbst und betrachten stattdessen eine skalare Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$\ddot{x}(t) + \gamma(t)x(t) = 0, \tag{1.1}$$

wobei  $\gamma$  eine glatte  $T$ -periodische Funktion sei. Auf mittlerweile ausgetretenem Wege gehen wir zum System erster Ordnung: sei  $y(t) = x(t)$  und  $z(t) = \dot{x}(t)$ . Dann ist

$$\partial_t \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\gamma(t) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix}.$$

Seien nun  $x_1$  und  $x_2$  Lösungen zu (1.1) mit den Anfangsbedingungen

$$\begin{aligned} x_1(0) &= 1, & \dot{x}_1(0) &= 0, \\ x_2(0) &= 0, & \dot{x}_2(0) &= 1. \end{aligned}$$

Die Übergangsmatrix  $\Phi$  erfüllt dann gerade

$$\Phi(t, 0) = \begin{pmatrix} x_1(t) & x_2(t) \\ \dot{x}_1(t) & \dot{x}_2(t) \end{pmatrix},$$

und wir haben auf üblichem Wege  $\det \Phi(t, t_0) = 1$  für alle  $t$  und  $t_0$ . Die Floquet-Multiplikatoren hängen dann also lediglich von  $\text{spur}(\Phi(T, 0))$  ab, also von

$$S = x_1(T) + x_2'(T).$$

Die Summe der Floquet-Multiplikatoren ist gerade  $S$ , und ihr Produkt ist gleich 1. Falls  $|S| \leq 2$ , dann liegen die Floquet-Multiplikatoren auf dem Einheitskreis in  $\mathbb{C}$ , und falls  $|S| > 2$ , dann sind beide Floquet-Multiplikatoren reell, und einer von beiden hat einen Betrag größer als eins.

Wir folgen nun [3, Kapitel 2], in angepaßter Notation und betrachten allgemeiner die parameterabhängige Differentialgleichung in selbst-adjungierter Form

$$(p(t)x'(t))' + (\lambda s(t) - q(t))x(t) = 0, \quad (1.2)$$

mit stetigen und  $T$ -periodischen Funktionen  $p, s, q$ . Weiterhin sei  $s(t) \geq s_0 > 0$  für alle  $t \in \mathbb{R}$ . Man kann (auf dem Wege einer unterhaltsamen Rechnung) zeigen, daß auch für diese allgemeinere Situation die Beziehung  $\det \Phi(T, 0) = 1$  gilt. Wir interessieren uns für das Verhalten der Floquet-Multiplikatoren für variierenden Parameter  $\lambda$ .

Folgendes läßt sich zeigen (siehe Theorem 2.3.1 in [3]):

Die Spur  $S(\lambda)$  hängt stetig von  $\lambda$  ab, und sie pendelt unendlich oft zwischen Intervallen mit  $S(\lambda) > 2$  und  $S(\lambda) < -2$  hin und her. Die Stellen mit  $S(\lambda) = \pm 2$  sind gerade die Eigenwerte von geeignet definierten Hilfsrandwertproblem (und somit im Prinzip berechenbar).

Naheliegenderweise heißen die Intervalle auf der  $\lambda$ -Achse, in denen  $|S(\lambda)| > 2$  ist, *Instabilitätsintervalle*, und die Intervalle mit  $|S(\lambda)| < 2$  heißen *Stabilitätsintervalle*. Durch geeignete Wahl von  $\lambda$  können wir also das System auf Instabilität oder Stabilität „tunen“.

Eine ganze Fülle weiterer Ergebnisse findet sich in [9], z.B. in Kapitel VII, Abschnitt 1.4 und folgende.

Ein Beispiel für ein solches „tuning“ findet sich in der Theorie der Wellengleichungen. Eine Wellengleichung ist eine Differentialgleichung der Form

$$u_{tt}(t, x) - \Delta u(t, x) = 0, \quad (t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n,$$

für eine Funktion  $u = u(t, x)$ . Wir interpretieren  $t$  als Zeitvariable,  $x$  als Ortsvariable, und  $u$  z.B. als „Auslenkung“. Man kann zeigen, daß Ableitungen der Funktion  $u$  abklingen (für  $t \rightarrow +\infty$ ) im Sinne von zum Beispiel folgender Ungleichung<sup>2</sup>:

$$\|u_t(t, \cdot)\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} + \|\nabla_x u(t, \cdot)\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} \leq C(1+t)^{-\frac{n-1}{2}(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})} \|u_1\|_{W_p^M(\mathbb{R}^n)},$$

wobei wir annehmen, daß die Funktion  $u$  die Anfangsbedingungen  $u(0, x) = 0$  und  $u_t(0, x) = u_1(x)$  erfüllen. Weiterhin ist  $1 < p \leq 2$  beliebig und  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ ; sowie die Sobolevordnung  $M \gg 1$  ist geeignet zu wählen.

Interessant ist, daß solche Abschätzungen unmöglich werden, wenn man den Vorfaktor 1 des Laplace-Operators beliebig periodisch stört, zum Beispiel durch die Ersetzung  $1 + \varepsilon \sin(t)$  mit  $|\varepsilon| \ll 1$ . Egal wie klein man  $\varepsilon$  auch wählt, stets kann man exponentiell wachsende Lösungen  $u$  basteln. Konkret gilt folgender Satz:

**Satz 1.23.** *Wir betrachten das Cauchy-Problem*

$$u_{tt} - b^2(t) \Delta u = 0, \quad u(0, x) = u_0(x), \quad u_t(0, x) = u_1(x),$$

mit einer  $T$ -periodischen positiven glatten Funktion  $b = b(t)$ .

Dann existieren keine Konstanten  $q, p, C, L$  und keine Funktion  $f: \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{R}_+$  mit  $\ln f(m) = o(m)$  für  $m \rightarrow +\infty$ , sodaß für alle Anfangsdaten  $u_0, u_1 \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$  die folgende Abschätzung gilt:

$$\|u_t(mT, \cdot)\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} + \|\nabla_x u(mT, \cdot)\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} \leq Cf(m) \left( \|u_0\|_{W_p^L(\mathbb{R}^n)} + \|u_1\|_{W_p^L(\mathbb{R}^n)} \right), \quad m \in \mathbb{N}_+. \quad (1.3)$$

<sup>2</sup>Solche Abklingabschätzungen [8] gehen auf STRICHARTZ zurück, werden aber gemeinhin als *dispersive estimates* bezeichnet.

Im Gegensatz dazu kann man eine solche Abschätzung zeigen, wenn man Funktionen  $f = f(m) = e^{Cm}$  zulässt, mit geeignetem großem  $C$ .

Der Beweis beruht (unter anderem) auf der Fouriertransformation: sei  $\hat{u}(t, \xi) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix\xi} u(t, x) dx$  mit  $\xi \in \mathbb{R}^n$ . Dann wird  $\Delta$  zu  $-|\xi|^2$ , und wir erhalten

$$\hat{u}_{tt}(t, \xi) + b^2(t)|\xi|^2 \hat{u}(t, \xi) = 0, \quad (t, \xi) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n.$$

Das ist eine gewöhnliche Differentialgleichung mit periodischem Koeffizienten  $b^2$  und Parameter  $|\xi|^2$ . Wir müssen jetzt nur noch erreichen, daß nur solche  $\xi$  eine „Rolle spielen“, für die  $|\xi|^2$  in einem Instabilitätsintervall liegt.

Genauer: sei  $\lambda$  so gewählt, daß  $S(\lambda) > 2$  für die Spur  $S$  der Übergangsmatrix  $\Phi(T, 0)$ . Sei  $y \in \mathbb{R}^n$  mit  $|y|^2 = \lambda$ . Dann definieren wir Anfangswerte  $u_0$  und  $u_1$  gemäß

$$u_0(x) = \exp(ixy) \chi\left(\frac{x}{M^2}\right), \quad u_1(x) = c \exp(ixy) \chi\left(\frac{x}{M^2}\right).$$

Hierbei ist  $\chi$  eine Abschneidefunktion, also  $\chi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$  mit  $\chi(z) = 1$  für  $|z| \leq 1$  sowie  $\chi(z) = 0$  für  $|z| \geq 2$ . Die Zahl  $M$  ist geeignet groß zu wählen, und der Parameter wird clever gewählt anhand der Übergangsmatrix  $\Phi(T, 0)$ . Die Fouriertransformierte von  $u$  hat dann ihren Träger „im Wesentlichen“ in der Nähe von  $y$ , und aus der Floquet-Theorie kann man dann mit einigem Aufwand zeigen, daß  $\hat{u}(t, \xi)$  exponentiell wächst für  $\xi \approx y$ . Und daraus wiederum folgt, daß die gewünschte Abschätzung (1.3) nicht gelten kann. Für die (ziemlich technischen Einzelheiten) verweisen wir auf [7].

## 1.8 Mittelung

Als Beispiel für das Phänomen der Mittelung betrachten wir einen „schwach linearen“ Oszillator, der beschrieben wird durch eine Differentialgleichung

$$\ddot{x} + x = \varepsilon f(x, \dot{x}),$$

wobei  $f$  genügend glatt sein soll und  $|\varepsilon| \ll 1$ .

Wir wissen, daß es für  $\varepsilon = 0$  eine periodische Lösung gibt.

Unsere Vermutung ist, daß die Lösung für  $\varepsilon \neq 0$  nicht unbedingt periodisch ist, aber daß sie „in der Nähe“ der Lösung zu  $\varepsilon = 0$  bleibt, für eine gewisse Zeit. Zum Beispiel könnte gelten, daß

$$|x_\varepsilon(t) - x_{\varepsilon=0}(t)| = \mathcal{O}(\varepsilon) \quad \text{für } 0 \leq t \leq \mathcal{O}(\varepsilon^{-1}).$$

Eine solche Abschätzung ist etwas besonderes: denn es wäre zu erwarten, daß  $|x_\varepsilon(t) - x_{\varepsilon=0}(t)| = \mathcal{O}(1)$  gilt auf einem Zeitintervall  $[0, \mathcal{O}(\varepsilon^{-1})]$ . Daß stattdessen die beiden Lösungen um weniger als  $\mathcal{O}(\varepsilon)$  differieren, liegt daran, daß „gewisse Oszillationen sich auslöschen“.

Wir gehen über zu einem System erster Ordnung:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y, \\ \dot{y} &= -x + \varepsilon f(x, y). \end{aligned}$$

Wenn  $\varepsilon = 0$ , dann gibt es Lösungen  $x(t) = r \cos(t + \varphi)$ ,  $y(t) = -r \sin(t + \varphi)$ , für gewisse Parameter  $r$  und  $\varphi$ , die sich aus den Anfangsbedingungen ergeben.

Für  $\varepsilon \neq 0$  machen wir den Ansatz

$$\begin{aligned} x(t) &= r(t) \cos(t + \varphi(t)), \\ y(t) &= -r(t) \sin(t + \varphi(t)) \end{aligned}$$

und erhalten daraus

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \dot{r} \cos(t + \varphi) - r \sin(t + \varphi)(1 + \dot{\varphi}) \stackrel{!}{=} -r \sin(t + \varphi), \\ \dot{y}(t) &= -\dot{r} \sin(t + \varphi) - r \cos(t + \varphi)(1 + \dot{\varphi}) \stackrel{!}{=} -r \cos(t + \varphi) + \varepsilon f, \end{aligned}$$

also

$$\begin{aligned} \dot{r} \cos(t + \varphi) - r \sin(t + \varphi) \dot{\varphi} &= 0, \\ -\dot{r} \sin(t + \varphi) - r \cos(t + \varphi) \dot{\varphi} &= \varepsilon f(r \cos(t + \varphi), -r \sin(t + \varphi)). \end{aligned}$$

Wir multiplizieren die erste Gleichung mit  $\sin(t + \varphi)$ , die zweite mit  $\cos(t + \varphi)$ , und addieren:

$$-r \dot{\varphi} = \varepsilon \cos(t + \varphi) f(r \cos(t + \varphi), -r \sin(t + \varphi)).$$

Analog bekommen wir eine explizite Gleichung für  $\dot{r}$ .

Die entstehenden Differentialgleichungen können wir schreiben als

$$\begin{aligned} \dot{r}(t) &= -\varepsilon g(t, r, \varphi), \\ \dot{\varphi}(t) &= -\frac{\varepsilon}{r} h(t, r, \varphi), \end{aligned}$$

wobei wir definiert haben:

$$\begin{aligned} g(t, r, \varphi) &:= \sin(t + \varphi) f(r \cos(t + \varphi), -r \sin(t + \varphi)), \\ h(t, r, \varphi) &:= \cos(t + \varphi) f(r \cos(t + \varphi), -r \sin(t + \varphi)). \end{aligned}$$

Von entscheidender Bedeutung für das folgende ist nun die Periodizität von  $g$  und  $h$ :

$$g(t + 2\pi, r, \varphi) = g(t, r, \varphi), \quad h(t + 2\pi, r, \varphi) = h(t, r, \varphi).$$

Unsere Hoffnung ist, daß über eine Periode sich die Schwankungen von  $g$  und  $h$  „wegmitteln“. Um das genauer auszudrücken, definieren wir die Mittelungen

$$\hat{g}(r, \varphi) := \frac{1}{2\pi} \int_{t=0}^{2\pi} g(t, r, \varphi) dt, \quad \hat{h}(r, \varphi) := \frac{1}{2\pi} \int_{t=0}^{2\pi} h(t, r, \varphi) dt,$$

und wir wollen die Funktionen  $r$  und  $\varphi$  vergleichen mit den Lösungen  $s$  und  $\psi$  zum System

$$\begin{aligned} \dot{s}(t) &= -\varepsilon \hat{g}(s, \psi), \\ \dot{\psi}(t) &= -\frac{\varepsilon}{s} \hat{h}(s, \psi). \end{aligned}$$

**Satz 1.24.** *Wir betrachten das Anfangswertproblem*

$$\dot{x}(t) = \varepsilon p(t, x) + \varepsilon^2 q(t, x, \varepsilon), \quad x(0) = x_0,$$

wobei  $x: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$  und  $p, q$  seien glatt. Sei  $p(t+T, x) = p(t, x)$  für alle  $(t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ , und wir definieren

$$\hat{p}(x) := \frac{1}{T} \int_{t=0}^T p(t, x) dt.$$

Sei  $y = y(t)$  die Lösung zum Anfangswertproblem

$$\dot{y}(t) = \varepsilon \hat{p}(y), \quad y(0) = x_0.$$

Dann existieren Konstanten (unabhängig von  $x$  und  $y$ )  $C_1, C_2, \varepsilon_0$  so daß gilt:

$$|x(t) - y(t)| \leq C_1 \varepsilon$$

falls  $0 \leq t \leq \frac{C_2}{\varepsilon}$  und  $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$ .

In Bezug auf das obige Beispiel hätten wir also zum Beispiel  $|r(t) - s(t)| \leq C_1 \varepsilon$  für  $0 \leq t \leq \frac{C_2}{\varepsilon}$  und kleine  $\varepsilon$ .

*Beweis.* Wir wollen von der Funktion  $x = x(t)$  übergehen zu einer Funktion  $\xi = \xi(t)$ , die eine „einfachere“ Differentialgleichung erfüllt, aber „in der Nähe von  $x$ “ liegt. Dazu machen wir den Ansatz

$$x(t) = \xi(t) + \varepsilon h(t, \xi(t)),$$

und wir streben an, daß

$$\dot{\xi}(t) = \varepsilon \hat{p}(\xi) + \varepsilon^2 R_0(t, \xi, \varepsilon), \quad \xi(0) = x_0 \quad (1.4)$$

gilt, wobei  $R_0$  eine glatte Funktion sei. Wir setzen insbesondere  $h(0, \xi) = 0$  voraus, für alle  $\xi \in \mathbb{R}^n$ .

Unser Ziel ist es, die Funktion  $h$  so zu finden, daß sie global beschränkt ist, also  $|h(t, \xi)| \leq H_0$  für alle  $(t, \xi) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$  (ansonsten ist eine untige Taylorentwicklung schwer zu rechtfertigen).

Im Folgenden sei  $R = R(t, x, \varepsilon)$  eine nicht näher beschriebene Funktion, die glatt und beschränkt von den Argumenten abhängt, und die an jeder Stelle ihres Auftretens etwas anderes bedeuten kann.

Aus der Differentialgleichung  $\dot{x} = \varepsilon p(t, x) + \varepsilon^2 q(t, x, \varepsilon)$  bekommen wir mit unserem Ansatz für  $\xi$  dann

$$\begin{aligned} \dot{\xi} + \varepsilon h_t + \varepsilon h_\xi \dot{\xi} &= \varepsilon p(t, \xi + \varepsilon h) + \varepsilon^2 q(t, x, \varepsilon), \\ \implies \dot{\xi}(1 + \varepsilon h_\xi) + \varepsilon h_t &= \varepsilon p(t, \xi) + \varepsilon^2 R(t, \xi, \varepsilon). \end{aligned}$$

Nun suchen wir die Funktion  $h$  als Lösung zu  $h_t(t, \xi) = p(t, \xi) - \hat{p}(\xi)$ . Zusammen mit  $h(0, \xi) = 0$  bekommen wir dann

$$h(t, \xi) = \int_{\tau=0}^t p(\tau, \xi) - \hat{p}(\xi) \, d\tau.$$

Wegen  $\int_{\tau=0}^{kT} p(\tau, \xi) - \hat{p}(\xi) \, d\tau = 0$  für jedes  $k \in \mathbb{N}$  ist dann die Funktion  $h$  tatsächlich auf  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$  global beschränkt, wie gewünscht. Somit folgt

$$\dot{\xi}(1 + \varepsilon h_\xi) = \varepsilon \hat{p}(\xi) + \varepsilon^2 R(t, \xi, \varepsilon).$$

Mit zwei neuen  $R$  haben wir dann

$$\dot{\xi} = \frac{\varepsilon}{1 + \varepsilon h_\xi} \hat{p}(\xi) + \varepsilon^2 R(t, \xi, \varepsilon) = \varepsilon \hat{p}(\xi) + \varepsilon^2 R(t, \xi, \varepsilon).$$

Das ist genau die gewünschte Differentialgleichung (1.4) für  $\xi$ . Nun haben wir

$$|x(t) - \xi(t)| \leq \varepsilon |h(t, \xi)| \leq \varepsilon H_0$$

für  $0 \leq t < \infty$ , also reicht es,  $|\xi - y|$  abzuschätzen, um zu einer Abschätzung für  $|x - y|$  zu kommen.

Einerseits haben wir nach Produktregel

$$\partial_t |\xi - y|^2 = 2|\xi - y| \partial_t |\xi - y|,$$

andererseits haben wir nach Produktregel

$$\partial_t |\xi - y|^2 = 2 \langle \xi - y, \dot{\xi} - \dot{y} \rangle = 2 \langle \xi - y, \varepsilon \hat{p}(\xi) - \varepsilon \hat{p}(y) + \varepsilon^2 R_0(t, \xi, \varepsilon) \rangle,$$

und somit ergibt sich

$$\begin{aligned} \partial_t |\xi - y| &\leq \varepsilon |\hat{p}(\xi) - \hat{p}(y)| + \varepsilon^2 |R_0(t, \xi, \varepsilon)| \\ &\leq \varepsilon L |\xi - y| + \varepsilon^2 C_R, \end{aligned}$$

denn die Funktion  $\hat{p}$  ist Lipschitzstetig mit der Lipschitzkonstanten  $L$ , und  $R_0$  ist global beschränkt mit einer Konstanten  $C_R$ .

Weiterhin haben wir  $|\xi(0) - y(0)| = |x_0 - x_0| = 0$ . Aus dem Gronwall-Lemma<sup>3</sup> folgt dann

$$|\xi(t) - y(t)| \leq \int_{\tau=0}^t \exp(\varepsilon L(t - \tau)) \varepsilon^2 C_R \, d\tau = \frac{\varepsilon^2 C_R}{\varepsilon L} (\exp(\varepsilon L t) - 1).$$

<sup>3</sup>Das GRONWALL-Lemma besagt: sei  $z = z(t)$  eine reellwertige Funktion mit  $\dot{z}(t) \leq \alpha z(t) + f(t)$  für  $t \geq 0$  und  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Dann ist  $z(t) \leq \exp(\alpha t) z(0) + \int_{\tau=0}^t \exp(\alpha(t - \tau)) f(\tau) \, d\tau$  für  $t \geq 0$ .

Nun gilt offensichtlich: falls  $0 \leq t \leq C_2 \varepsilon^{-1}$ , dann ist  $\exp(\varepsilon Lt) - 1 \leq \exp(LC_2)$ , und wir haben dann

$$|\xi(t) - y(t)| \leq \frac{\varepsilon C_R}{L} e^{LC_2} = \mathcal{O}(\varepsilon).$$

Das ist die gewünschte Ungleichung. □

Weiterhin gilt: ein Fixpunkt des ungestörten Systems wird zu einem kleinen periodischen Orbit des gestörten Systems, im Sinne des folgenden Satzes:

**Satz 1.25.** *Sei  $x = x(t)$  Lösung zu*

$$\dot{x} = \varepsilon f(t, x, \varepsilon) \tag{1.5}$$

mit  $f(t+T, x, \varepsilon) = f(t, x, \varepsilon)$  für alle  $(t, x, \varepsilon)$ . Wir setzen

$$\hat{f}(y) := \frac{1}{T} \int_{\tau=0}^T f(\tau, y, 0) \, d\tau.$$

Sei  $y_0$  Ruhelage zu  $\dot{y} = \varepsilon \hat{f}(y)$ , also  $\hat{f}(y_0) = 0$ . Wir setzen voraus, daß die Jacobi-Matrix  $\hat{f}'(y_0)$  invertierbar ist.

Dann besitzt (1.5) genau einen  $T$ -periodischen Orbit nahe  $y_0$  für kleine  $\varepsilon$ .

*Beweis.* Sei  $x = x(t)$  eine Lösung zu (1.5) mit Startwert  $x_0$ . Wenn diese Lösung  $T$ -periodisch ist, dann muß

$$x_0 = x(T) = x_0 + \int_{\tau=0}^T \dot{x}(\tau) \, d\tau = x_0 + \varepsilon \int_{\tau=0}^T f(\tau, x(\tau), \varepsilon) \, d\tau$$

gelten. Weiterhin ist, für  $0 \leq t \leq T$ ,

$$|x(t) - x_0| \leq \int_{\tau=0}^t |\dot{x}(\tau)| \, d\tau = \varepsilon \int_{\tau=0}^t |f(\tau, x(\tau), \varepsilon)| \, d\tau = \mathcal{O}(\varepsilon),$$

also ist eine Entwicklung in Potenzen von  $\varepsilon$  möglich:

$$f(\tau, x(\tau), \varepsilon) = f(\tau, x_0, 0) + \varepsilon R(\tau, x_0, \varepsilon),$$

wobei  $R$  in glatter Weise von seinen Argumenten abhängt. Damit haben wir dann

$$\begin{aligned} x_0 &= x_0 + \varepsilon \int_{\tau=0}^T f(\tau, x(\tau), \varepsilon) \, d\tau \\ &= x_0 + \varepsilon \int_{\tau=0}^T (f(\tau, x_0, 0) + \varepsilon R(\tau, x_0, \varepsilon)) \, d\tau \\ &= x_0 + \varepsilon T \hat{f}(x_0) + \varepsilon^2 \int_{\tau=0}^T R(\tau, x_0, \varepsilon) \, d\tau. \end{aligned}$$

Das läßt sich umformen zu

$$0 = \hat{f}(x_0) + \frac{\varepsilon}{T} \int_{\tau=0}^T R(\tau, x_0, \varepsilon) \, d\tau,$$

was wir als eine Gleichung der Form  $0 = G(x_0, \varepsilon)$  lesen, auf die wir den Satz über implizite Funktionen anwenden: Zunächst ist tatsächlich  $0 = G(y_0, 0)$ . Weiterhin gilt, nach Voraussetzung,

$$\det \left( \frac{\partial}{\partial x_0} G(x_0, \varepsilon) \right) \Big|_{(x_0, \varepsilon) = (y_0, 0)} \neq 0,$$

sodaß der Satz über implizite Funktionen uns garantiert, daß für kleine  $|\varepsilon|$  eine  $C^1$ -Funktion  $x_0 = x_0(\varepsilon)$  existiert. □

## 1.9 Lyapunov-Funktionale

Wir betrachten ein System  $\dot{x} = f(x)$  mit einem stationären Punkte  $x^*$ , also  $f(x^*) = 0$ . Für das linearisierte System

$$\dot{y} = f'(x^*)y$$

ist dann bekannt:

- wenn alle Eigenwerte von  $f'(x^*)$  in  $\mathbb{C}_- = \{z \in \mathbb{R}: \Re z < 0\}$  liegen, dann ist  $x^*$  ein asymptotisch stabiler Fixpunkt des nichtlinearen Systems,
- wenn ein Eigenwert von  $f'(x^*)$  in  $\mathbb{C}_+ = \{z \in \mathbb{C}: \Re z > 0\}$  liegt, dann ist  $x^*$  ein instabiler Fixpunkt des nichtlinearen Systems.

Die naheliegende Frage ist nun, was in den übrigen Fällen gilt.

Weiterhin wollen wir uns überlegen, wie groß das „Einzugsgebiet“ des Fixpunkts (oder allgemeiner: des Attraktors) im Falle asymptotischer Stabilität ist.

Als Beispiel betrachten wir

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 + \lambda(x_1^2 + x_2^2), \\ \dot{x}_2 &= -x_1 + \lambda(x_1^2 + x_2^2)\end{aligned}$$

mit  $x^* = (x_1^*, x_2^*)^\top = (0, 0)^\top$ . Wir haben

$$f'(x^*) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

mit Eigenwerten  $\pm i$ , also liefern die bisherigen Kriterien keine Aussage zur Stabilität von  $x^*$ .

Allerdings haben wir

$$\partial_t(x_1^2 + x_2^2) = 2x_1\dot{x}_1 + 2x_2\dot{x}_2 = \dots = 2\lambda(x_1^2 + x_2^2),$$

und somit eine instabile Lösung für  $\lambda > 0$ , bzw. eine stabile Lösung für  $\lambda < 0$ .

Insgesamt werden wir erhalten:

*Wenn die Matrix des linearisierten Problems Eigenwerte auf der imaginären Achse hat, dann hängen die Stabilitätseigenschaften des nichtlinearen Problems von den nichtlinearen Termen ab.*

**Definition 1.26.** Sei  $x^* \in \mathbb{R}^n$  mit  $f(x^*) = 0$ . Sei  $U \subset \mathbb{R}^n$  eine Umgebung von  $x^*$ . Eine Funktion  $V \in C^1(U; \mathbb{R})$  heißt positiv definit in  $U$ , wenn

$$V(x^*) = 0, \quad V(x) > 0 \quad \forall x \in U \setminus \{x^*\}.$$

Eigentlich müßten wir schreiben *positiv definit bezüglich  $x^*$* , aber es wird immer aus dem Kontext sichtbar sein, welcher Punkt  $x^*$  gemeint ist.

Wir glauben (bzw. lösen als Übungsaufgabe): wenn nicht nur  $V \in C^1(U, \mathbb{R})$ , sondern sogar  $V \in C^2$  und wenn die Hesse-Matrix  $(\nabla \otimes \nabla)V$  im Punkt  $x^*$  positiv definit ist, dann sind die Niveauflächen  $\{x \in \mathbb{R}^n: V(x) = \text{const.}\}$  diffeomorph zu Einheitskugelflächen (für  $V \in C^1$  kann die Gestalt dieser Niveaumengen ziemlich unübersichtlich sein).

Inspiziert durch diese geometrische Vorstellung, fragen wir uns (für allgemeines positiv definites  $V \in C^1$ ), ob die Trajektorien zur Differentialgleichung  $\dot{x} = f(x)$  die Niveauflächen „von innen nach außen“ oder „von außen nach innen“ durchdringen. Sei also  $x = x(t)$  eine Lösung, dann ist

$$\partial_t V(x(t)) = \nabla V(x) \cdot \dot{x} = \langle \nabla V(x), f(x) \rangle.$$

Geometrisch gesprochen (und genügend Glattheit vorausgesetzt), zeigt  $\nabla V$  in die Richtung des steilsten Anstiegs von  $V$ , also senkrecht auf den Niveauflächen nach außen, und  $f(x)$  zeigt in die Tangentialrichtung der Trajektorie.

Damit läßt sich folgendes Ergebnis beweisen:

**Satz 1.27 (Lyapunov).** Sei  $x^*$  ein stationärer Punkt für das System  $\dot{x} = f(x)$ . Sei  $V$  positiv definit in einer Umgebung  $U$  von  $x^*$ . Dann gilt:

- Falls  $\langle \nabla V(x), f(x) \rangle \leq 0$  für alle  $x \in U$ , dann ist  $x^*$  stabil.
- Falls  $\langle \nabla V(x), f(x) \rangle < 0$  für alle  $x \in U \setminus \{x^*\}$ , dann ist  $x^*$  asymptotisch stabil.
- Wenn  $\langle \nabla V(x), f(x) \rangle > 0$  für alle  $x \in U \setminus \{x^*\}$ , dann ist  $x^*$  instabil.

**Definition 1.28.** Eine Funktion  $V \in C^1(U; \mathbb{R})$  heißt Lyapunov-Funktional wenn  $V$  positiv definit in  $U$  ist, mit  $\langle \nabla V(x), f(x) \rangle \leq 0$  für jedes  $x \in U$ .

Wenn sogar  $\langle \nabla V(x), f(x) \rangle < 0$  ist für jedes  $x \in U \setminus \{x^*\}$ , dann heißt  $V$  striktes Lyapunov-Funktional.

Als Beispiel betrachten wir das Pendel mit der Differentialgleichung  $\partial_t^2 \theta + \frac{g}{l} \sin \theta = 0$ . Wir setzen  $x_1(t) = \theta(t)$  und  $x_2(t) = \partial_t \theta(x)$ , was uns auf

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= -\frac{g}{l} \sin x_1\end{aligned}$$

führt. Der stationäre Punkt ist  $x^* = (0, 0)^\top$ . Wir haben

$$f'(x^*) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{g}{l} & 0 \end{pmatrix}$$

mit den beiden Eigenwerten  $\pm i\sqrt{\frac{g}{l}}$ , also liefert die lineare Stabilitätstheorie keine Aussage.

Ein erster Versuch eines Lyapunov-Funktional ist  $V(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$ , und wir bekommen

$$\langle \nabla V(x), f(x) \rangle = 2x_1x_2 - 2x_2\frac{g}{l} \sin x_1,$$

was in der Umgebung des Ursprungs das Vorzeichen wechselt.

Für einen zweiten Versuch wählen wir die physikalische Gesamtenergie,

$$V(x_1, x_2) = \frac{1}{2}ml^2x_2^2 + mgl(1 - \cos x_1),$$

was offensichtlich positiv definit nahe  $(0, 0)^\top$  ist. Wir stellen fest, daß  $\langle \nabla V, f \rangle \equiv 0$  ist, woraus sich die Stabilität des stationären Punkts ergibt. Die Trajektorien verbleiben in den Niveaumengen der Funktion  $V$ .

Als weiteres Beispiel betrachten wir die Differentialgleichung  $\ddot{z} + 2a\dot{z} + z + z^3 = 0$ , wobei  $0 < a < 1$  ist. Wir setzen  $x_1 = z$  und  $x_2 = \dot{z}$ , was uns das System

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= -x_1 - 2ax_2 - x_1^3\end{aligned}$$

erbringt, mit einzigem stationärem Punkt  $x^* = (0, 0)^\top$ . Für die Jacobi-Matrix bekommen wir

$$f'(x^*) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2a \end{pmatrix}$$

mit Eigenwerten  $-a \pm i\sqrt{1-a^2}$ , also ist  $x^*$  asymptotisch stabil. Wie groß ist das „Basin“ dieses Attraktors  $x^*$  ?

Unser Hilfsmittel soll ein geeignet gewähltes Lyapunov-Funktional sein. Dazu bringen wir als erstes die Matrix  $f'(x^*)$  auf eine Normalform. Die Substitution  $y = Px$  mit einer noch zu bestimmenden Matrix  $P \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$  liefert uns

$$\dot{y} = Pf'(x^*)P^{-1} \cdot y + \mathcal{O}(\|y\|^2),$$

und  $P$  soll so gewählt werden, daß  $Pf'(x^*)P^{-1}$  möglichst „schön“ wird. Die übliche Jordan-Normalform ist uns hierbei aber nicht zugänglich, weil die Eigenwerte und damit auch die Eigenvektoren von  $f'(x^*)$  nicht reell sind, und weil somit auch  $P$  nicht im  $\mathbb{R}^{2 \times 2}$  wäre. Stattdessen benutzen wir die *reelle Jordan-Normalform*:

**Lemma 1.29 (Reelle Jordan-Normalform).** Sei  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ . Dann gibt es eine Matrix  $P \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ , sodaß  $J = PAP^{-1}$  eine der drei folgenden Formen hat:

$$J = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}, \quad J = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}, \quad J = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix},$$

mit  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$  und  $\beta \neq 0$ .

*Beweis.* Im Anhang. □

Nun nehmen wir also  $\beta = \sqrt{1 - a^2}$  und

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -a & \beta \end{pmatrix}, \quad P^{-1} = \frac{1}{\beta} \begin{pmatrix} \beta & 0 \\ a & 1 \end{pmatrix},$$

sowie  $y = Px$ . Das bedeutet insbesondere  $y_1 = x_1$ , was hilfreich zu wissen ist für die Transformation der nichtlinearen Terme. Damit erhalten wir dann

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 &= -ay_1 + \beta y_2, \\ \dot{y}_2 &= -\beta y_1 - ay_2 - \frac{1}{\beta} y_1^3. \end{aligned}$$

Nun sind im linearen Hauptteil die Variablen  $y_1$  und  $y_2$  gleichberechtigt, also liegt es nahe,

$$V(y_1, y_2) = \frac{1}{2a}(y_1^2 + y_2^2)$$

zu wählen. Dann bekommen wir, nach einiger Rechnung,

$$\langle \nabla_y V, f(P^{-1}x) \rangle = -(y_1^2 + y_2^2) - \frac{1}{a\beta} y_1^3 y_2,$$

und es stellt sich die Frage, wo das negativ ist. Wir vermuten einen Kreis um den Ursprung mit Radius  $r_0$  als Mindestmenge:

Wenn  $y_1^2 + y_2^2 \leq r_0^2$ , dann ist  $|y_1^3 y_2| \leq r_0^4$ , und nun sollten wir dafür sorgen, daß

$$r_0^2 \geq \frac{1}{a\beta} r_0^4,$$

also z.B.  $r_0 = \sqrt{a\beta}$ .

Damit haben wir erhalten: Wenn der Startwert  $(y_1(0), y_2(0))^T$  im Kreis um den Ursprung mit Radius  $r_0$  liegt, dann wird die Trajektorie zum Fixpunkt gezogen. In Wirklichkeit ist das Einzugsgebiet natürlich noch größer. Bei Rücktransformation auf die  $x$ -Koordinaten erhalten wir dann eine Ellipse als Mindest-Einzugsgebiet.

## 1.10 $\omega$ -Limesmengen und Invarianzprinzipien

Unser Ziel ist nach wie vor eine genauere Beschreibung von Einzugsgebieten. Dazu brauchen wir einige Begriffe:

**Definition 1.30.** Sei  $\Phi_t$  ein Fluß auf  $X$ , und sei  $x_0 \in X$ . Dann heißen

$$\begin{aligned} \omega(x_0) &:= \left\{ y \in X : \exists \text{ Folge } (t_k)_{k \in \mathbb{N}} \text{ mit } t_k \nearrow +\infty \text{ und } y = \lim_{k \rightarrow +\infty} \Phi_{t_k}(x_0) \right\}, \\ \alpha(x_0) &:= \left\{ y \in X : \exists \text{ Folge } (t_k)_{k \in \mathbb{N}} \text{ mit } t_k \searrow -\infty \text{ und } y = \lim_{k \rightarrow +\infty} \Phi_{t_k}(x_0) \right\} \end{aligned}$$

$\omega$ -Limesmenge bzw.  $\alpha$ -Limesmenge von  $x_0$ .

Die Wahl der Buchstaben erklärt sich aus ihren Positionen im griechischen Alphabet.

Mehr oder weniger aus der Definition folgt dann

$$\omega(x_0) = \bigcap_{t \geq 0} \overline{\gamma_+(\Phi_t(x_0))},$$

$$\alpha(x_0) = \bigcap_{t \leq 0} \overline{\gamma_-(\Phi_t(x_0))},$$

wobei  $\gamma_+$  und  $\gamma_-$  den Vorwärts- bzw. Rückwärtsorbit bezeichnen.

Wenn die Trajektorie ab  $x_0$  einem Grenzwert zustreben sollte, dann besteht  $\omega(x_0)$  genau aus diesem einen Punkt. Wenn die Trajektorie ab  $x_0$  einer periodischen Bahn „zustreben“ sollte, dann ist  $\omega(x_0)$  gleich dieser periodischen Bahn. Und wenn der Vorwärtsorbit ab  $x_0$  unbeschränkt ist, dann kann  $\omega(x_0)$  gleich der leeren Menge sein.

**Satz 1.31.** *Sei  $\gamma_+(x_0)$  beschränkt. Dann ist  $\omega(x_0)$  kompakt, nichtleer, invariant und zusammenhängend.*

*Beweis.* Nach Voraussetzung gibt es ein  $M \in \mathbb{R}_+$  mit  $\gamma_+(x_0) \subset B_M(0) := \{y \in \mathbb{R}^n : \|y\| < M\}$ . Also liegt  $\omega(x_0)$  ebenfalls in  $B_M(0)$ , ist also beschränkt. Weiterhin ist  $\omega(x_0)$  als Durchschnitt abgeschlossener Mengen wieder abgeschlossen, und somit kompakt.

Um zu zeigen, daß  $\omega(x_0)$  nichtleer ist, konstruieren wir ein Element davon: sei  $(t_1, t_2, \dots)$  irgendeine streng monoton wachsende Folge, die nach  $+\infty$  divergiert. Dann ist die Folge  $(\Phi_{t_k}(x_0))_{k \in \mathbb{N}}$  in der kompakten Menge  $\overline{B_M(0)}$  enthalten, also gibt es eine Teilfolge  $(t_{k'})_{k' \in \mathbb{N}}$ , sodaß ein Grenzwert

$$\lim_{k' \rightarrow \infty} \Phi_{t_{k'}}(x_0) = x_\infty$$

in  $\overline{B_M(0)}$  existiert. Dieser Grenzwert gehört dann zu  $\omega(x_0)$ .

Um zu zeigen, daß  $\omega(x_0)$  invariant ist, wählen wir ein  $y \in \omega(x_0)$  und ein beliebiges  $t^* \in \mathbb{R}$ . Dann wollen wir zeigen, daß  $\Phi_{t^*}(y) \in \omega(x_0)$ . Zunächst existiert eine monoton wachsende und nach  $+\infty$  strebende Folge  $(t_1, t_2, \dots)$  mit  $y = \lim_{k \rightarrow \infty} \Phi_{t_k}(x_0)$ . Nun ist aber

$$\Phi_{t_k+t^*}(y) = \Phi_{t^*}(\Phi_{t_k}(y)) \longrightarrow \Phi_{t^*}(y),$$

denn  $\Phi_{t^*}$  ist ein Diffeomorphismus, also insbesondere stetig. Also gehört auch  $\Phi_{t^*}(y)$  zu  $\omega(x_0)$ , und die zu diesem Punkt gehörige Folge ist gerade  $(t_1 + t^*, t_2 + t^*, \dots)$ .

Es bleibt zu zeigen, daß  $\omega(x_0)$  zusammenhängend ist. Wir gehen indirekt vor. Nach Definition des Begriffs „zusammenhängend“ gibt es dann also zwei abgeschlossene, nichtleere und disjunkte Mengen  $\omega_1$  und  $\omega_2$  mit  $\omega(x_0) = \omega_1 \cup \omega_2$ . Offensichtlich sind diese beiden Mengen beschränkt, also sogar kompakt. Dann gibt es ein positives  $\varepsilon$ , sodaß auch die beiden offenen Umgebungen

$$U_\varepsilon(\omega_1) = \{x \in \mathbb{R}^n : \text{dist}(x, \omega_1) < \varepsilon\},$$

$$U_\varepsilon(\omega_2) = \{x \in \mathbb{R}^n : \text{dist}(x, \omega_2) < \varepsilon\}$$

disjunkt sind. Ein „Endstück“  $\gamma_+(\Phi_t(x_0))$  des Orbits  $\gamma_+(x_0)$  kann nicht komplett zu  $U_\varepsilon(\omega_1)$  gehören, weil dann  $\omega_2$  nicht Bestandteil von  $\omega(x_0)$  wäre. Analog kann ein solches Endstück nicht komplett zu  $U_\varepsilon(\omega_2)$  gehören. Also muß der Orbit  $\gamma_+(x_0)$  immer zwischen beiden Umgebungen wechseln.

Also existiert eine Folge  $(s_1, s_2, \dots)$  mit  $s_k \nearrow +\infty$ , sodaß  $\Phi_{s_k}(x_0)$  weder in  $U_\varepsilon(\omega_1)$  noch in  $U_\varepsilon(\omega_2)$  liegt. Die Kompaktheit von  $\overline{B_M(0)}$  liefert dann einen Häufungspunkt der Folge  $(\Phi_{s_k}(x_0))_{k \in \mathbb{N}}$ . Dieser Häufungspunkt gehört dann zu  $\omega(x_0)$ , aber er hat sowohl zu  $\omega_1$  als auch zu  $\omega_2$  einen Abstand von wenigstens  $\varepsilon > 0$ . Das kann nicht sein.  $\square$

**Satz 1.32 (Invarianzprinzip).** *Sei  $V$  eine reellwertige stetige Funktion auf  $\mathbb{R}^n$ , sei  $k \in \mathbb{R}$ , sei*

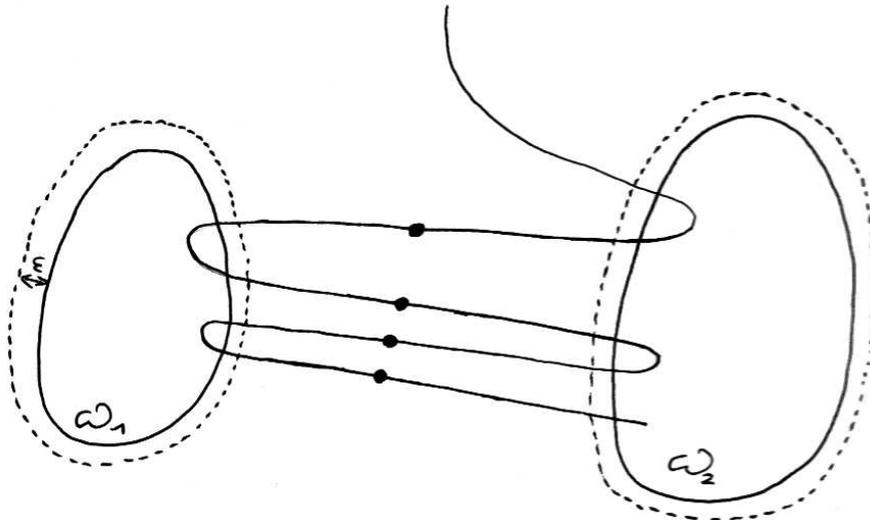
$$U = \{x \in \mathbb{R}^n : V(x) < k\}.$$

*Wir setzen voraus, daß  $V \in C^1(U)$ , und daß*

$$\langle \nabla V(x), f(x) \rangle \leq 0 \quad \forall x \in U.$$

*Wir definieren  $S = \{x \in U : \langle \nabla V(x), f(x) \rangle = 0\}$ , und  $M$  als größte invariante Teilmenge von  $S$ .*

*Dann gilt: jeder Vorwärtsorbit, der in  $U$  startet und beschränkt bleibt, hat sein  $\omega$ -Limesmenge in  $M$ .*

Abbildung 1.18:  $\omega(x_0)$  ist zusammenhängend

*Beweis.* Nimm  $x_0 \in U$ , und sei  $x = x(t)$  die Lösung zu  $\dot{x} = f(x)$  mit Anfangswert  $x_0$  für  $t = 0$ . Wir setzen voraus, daß  $\gamma_+(x_0)$  beschränkt bleibt.

Solange  $x(t)$  in  $U$  verbleibt (und für kleine Zeiten gilt das sicherlich, weil  $U$  offen ist), haben wir

$$\partial_t V(x(t)) = \langle \nabla V(x), f(x) \rangle \leq 0,$$

also ist, für solche  $t$ ,  $V(x(t)) \leq V(x_0) < k$ , und demnach bleibt die Trajektorie  $x(t)$  in  $U$  für alle Ewigkeit.

Die Funktion  $t \mapsto V(x(t))$  ist monoton fallend (für  $t \in \mathbb{R}_+$ ) und nach unten beschränkt, denn der Orbit  $\gamma_+(x_0)$  verbleibt in einer kompakten Menge, und auf kompakten Mengen hat die stetige Funktion  $V$  eine untere Schranke. Also existiert ein  $c \in \mathbb{R}$  mit

$$c = \lim_{t \rightarrow \infty} V(x(t)).$$

Sei nun  $y \in \omega(x_0)$ , wir interessieren uns für  $V(y)$ . Zunächst gibt es eine streng monoton wachsende Folge  $(t_1, t_2, \dots)$  mit  $t_k \rightarrow +\infty$ , sodaß  $y = \lim_{k \rightarrow \infty} x(t_k)$ . Weil  $V$  stetig ist, haben wir dann  $V(y) = c$ .

Also gilt  $V(y) = c$  für jedes  $y \in \omega(x_0)$ .

Wir wissen, daß  $\omega(x_0)$  invariant unter dem Fluß  $\Phi$  ist. Also haben wir  $\Phi_t(y) \in \omega(x_0)$  für jedes  $t \in \mathbb{R}$ , sobald  $y \in \omega(x_0)$ . Dann gilt auch  $V(\Phi_t(y)) = c$  für jedes  $t \in \mathbb{R}$  und jedes  $y \in \omega(x_0)$ . Wenn wir die Zeitableitung bilden, haben wir dann

$$\langle (\nabla V)(\Phi_t(y)), f(\Phi_t(y)) \rangle = 0.$$

Das bedeutet  $\omega(x_0) \subset S$  (man setze z.B.  $t = 0$ ). Nun ist  $\omega(x_0)$  invariant, also muß  $\omega(x_0)$  in der größten invarianten Teilmenge von  $S$  enthalten sein.  $\square$

Häufig hat man die Situation, daß  $V$  „an den Rändern hochgeht“, also koerziv ist:

**Satz 1.33.** Sei  $V \in C^1(\mathbb{R}^n; \mathbb{R})$  mit  $V(x) \rightarrow +\infty$  für  $\|x\| \rightarrow +\infty$ . Sei weiterhin  $\langle \nabla V(x), f(x) \rangle \leq 0$  für alle  $x \in \mathbb{R}^n$ .

Dann ist jeder Vorwärtsorbit beschränkt, und jeder Vorwärtsorbit hat seinen  $\omega$ -Limes in  $M$ , der größten invarianten Teilmenge von

$$\{x \in \mathbb{R}^n: \langle \nabla V(x), f(x) \rangle = 0\}.$$

*Beweis.* Ergibt sich als Folgerung aus dem vorherigen Satz.  $\square$

Um diese Erkenntnisse anzuwenden, kehren wir nochmal zur Differentialgleichung

$$\ddot{z} + 2a\dot{z} + z + z^3 = 0$$

zurück. Wir setzen  $x_1 = z$  und  $x_2 = \dot{z}$ , und bekommen dann

$$\partial_t \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ x_1^3 \end{pmatrix}.$$

Wir interpretieren  $a > 0$  als Reibungskoeffizient. Für  $a = 0$  bekommen wir ein konservatives System mit Energie

$$V(x_1, x_2) = \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2) + \frac{1}{4}x_1^4.$$

Die Orbits dazu verlaufen auf den Niveaumengen  $V(x_1, x_2) = \text{const.}$ .

Sei nun  $a > 0$ . Dann haben wir

$$\partial_t V(x_1(t), x_2(t)) = \langle \nabla V(x), f(x) \rangle = \left\langle \begin{pmatrix} x_1 + x_1^3 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_2 \\ -x_1 - 2ax_2 - x_1^3 \end{pmatrix} \right\rangle = -2ax_2^2 \leq 0.$$

Nun gilt mit der Folgerung aus dem Invarianzprinzip

$$V \in C^1(\mathbb{R}^2; \mathbb{R}),$$

$$V(x) \rightarrow +\infty \quad \text{falls} \quad \|x\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \rightarrow \infty.$$

Also ist jeder positive Orbit beschränkt, und er hat seinen  $\omega$ -Limes in der größten invarianten Teilmenge von

$$\{x \in \mathbb{R}^2 : \langle \nabla V(x), f(x) \rangle = 0\} = \{x \in \mathbb{R}^2 : x_2^2 = 0\}.$$

Also suchen wir die größte invariante Teilmenge  $M$  von  $\{x \in \mathbb{R}^2 : x_2 = 0\}$ .

Sei  $x^* \in M$ . Dann ist  $x^* = (x_1^*, x_2^*) = (x_1^*, 0)$ . Weiterhin bleibt  $\Phi_t(x_*)$  in  $M$ , denn  $M$  ist invariant. Also haben wir

$$\Phi_t(x^*) = (x_1(t), 0).$$

Andererseits ist  $\partial_t x_1(t) = x_2 = 0$ , also ist  $x_1(t) = x_1^*$  für alle  $t \in \mathbb{R}$ . Weiterhin ist

$$\partial_t x_2(t) = \partial_t 0 = 0 = -x_1 - 2ax_2 - x_1^3 = -x_1 - x_1^3 = -x_1(1 + x_1^2),$$

also gilt  $x_1^* = x_1(t) = 0$ . Demnach ist die größte invariante Teilmenge  $M$  von  $\{x \in \mathbb{R}^2 : x_2 = 0\}$  gerade  $(0, 0)$ , und jeder positive Orbit strebt zu diesem Punkt. Demnach ist das Einzugsgebiet dieses Fixpunktes der gesamte  $\mathbb{R}^2$ .

## 1.11 Stabile und instabile Mannigfaltigkeiten

Zur Einführung betrachten wir eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  mit einigen Eigenwerten in der offenen rechten Halbebene  $\mathbb{C}_+$  und einigen Eigenwerten in der offenen linken Halbebene  $\mathbb{C}_-$ , aber keinen Eigenwerten auf der imaginären Achse  $i\mathbb{R}$ .

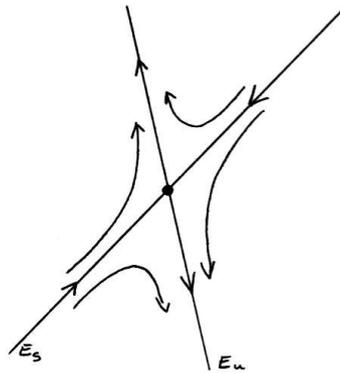
Diese Situation verdient einen eigenen Namen:

**Definition 1.34.** Eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  heißt hyperbolisch, wenn für das Spektrum  $\sigma(A)$  gilt:

$$\sigma(A) \cap (i\mathbb{R}) = \emptyset,$$

$$\sigma(A) \cap \mathbb{C}_- \neq \emptyset,$$

$$\sigma(A) \cap \mathbb{C}_+ \neq \emptyset.$$

Abbildung 1.19: Das übliche Phasenporträt eines Sattels im  $\mathbb{R}^2$ 

Dann ist die Ruhelage  $x_* = 0$  des Systems  $\dot{x} = Ax$  ein instabiler Sattelpunkt, und es ergibt sich (im Falle  $n = 2$ ) das übliche Phasenporträt. Wir beobachten stabile und instabile Unterräume des  $\mathbb{R}^n$ :

$$E_s = \text{span} \{ \text{Eigenvektoren und Hauptvektoren zu Eigenwerten in } \mathbb{C}_- \},$$

$$E_u = \text{span} \{ \text{Eigenvektoren und Hauptvektoren zu Eigenwerten in } \mathbb{C}_+ \}$$

und haben  $\mathbb{R}^n = E_s \oplus E_u$ .

Hierbei müssen wir aufpassen bei Eigenwerten in  $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ . Dann sind nämlich auch die Eigenvektoren leider nicht-reell, und in den span gehen Realteil und Imaginärteil des Eigenvektors getrennt ein, siehe den Beweis zu Lemma 1.29. Insgesamt sind dann sowohl  $E_s$  als auch  $E_u$  selbstverständlich reelle Unterräume des  $\mathbb{R}^n$  (alles andere wäre auch kaum sinnvoll definierbar).

Weiterhin beobachten wir: wenn wir die Zeitrichtung umdrehen, dann wird  $A$  zu  $-A$ , und die Räume  $E_s$  und  $E_u$  tauschen ihre Rollen.

Nun fragen wir uns, was aus den stabilen bzw. instabilen Unterräumen  $E_s$  bzw.  $E_u$  wird im nichtlinearen Fall?

Zunächst wagen wir die entsprechenden Definitionen:

**Definition 1.35.** Sei  $x_*$  ein Gleichgewichtspunkt des Systems  $\dot{x} = f(x)$ , und sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  eine Umgebung von  $x_*$ . Dann definieren wir die lokale stabile Mannigfaltigkeit  $W_{\text{loc}}^s(x_*, \Omega)$  und die lokale instabile Mannigfaltigkeit  $W_{\text{loc}}^u(x_*, \Omega)$  als

$$W_{\text{loc}}^s(x_*, \Omega) = \{x_0 \in \Omega : \gamma_+(x_0) \subset \Omega, \quad \omega(x_0) = \{x_*\}\},$$

$$W_{\text{loc}}^u(x_*, \Omega) = \{x_0 \in \Omega : \gamma_-(x_0) \subset \Omega, \quad \alpha(x_0) = \{x_*\}\}.$$

Aus dieser Definition heraus ist klar: wenn es solche Mannigfaltigkeiten gibt, dann wechseln sie ihre Rollen beim Wechsel der Zeitrichtung.

Und klar ist ebenfalls: wenn  $x_*$  ein stabiler Fixpunkt ist, dann ist —falls  $\Omega$  genügend klein ist—  $W_{\text{loc}}^s(x_*, \Omega) = \Omega$  sowie  $W_{\text{loc}}^u(x_*, \Omega) = \emptyset$ .

Der nächste Satz besagt sinngemäß folgendes (unter der Voraussetzung, daß  $A = f'(0)$  hyperbolisch ist):

- es existiert eine kleine Umgebung  $\Omega$  von  $x_* = 0$  und darin eine nichtleere stabile Mannigfaltigkeit  $W_{\text{loc}}^s(0, \Omega)$ ,
- der Tangentialraum an  $W_{\text{loc}}^s(0, \Omega)$  im Ursprung ist gerade gleich dem stabilen Unterraum  $E_s$  zur Matrix  $A$ ,
- die Mannigfaltigkeit  $W_{\text{loc}}^s(0, \Omega)$  kann parametrisiert werden mit Punkten aus  $E_s$  als Parameter,
- jede Lösung, deren positiver Orbit in  $\Omega$  verbleibt, muß sich auf der Mannigfaltigkeit  $W_{\text{loc}}^s(0, \Omega)$  aufhalten.

**Satz 1.36 (Lokale stabile Mannigfaltigkeit).** *Wir betrachten das System  $\dot{x} = f(x)$  mit einer Funktion  $f \in C^1(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$  und  $f(0) = 0$ . Wir setzen voraus, daß  $A = f'(0)$  hyperbolisch ist. Seien  $E_s$  und  $E_u$  der stabile bzw. instabile Unterraum zur Matrix  $A$ .*

*Dann gibt es eine Umgebung  $\Omega$  von  $x = 0 \in \mathbb{R}^n$  sodaß für die nichtleere Umgebung  $\Omega_s = \Omega \cap E_s$  von  $x = 0 \in E_s$  eine Funktion  $\psi \in C^1(\Omega_s, E_u)$  existiert mit*

$$W_{\text{loc}}^s(0, \Omega) = \{x = (x_s, x_u) : x_u = \psi(x_s)\} = \text{graph}(\psi).$$

*Die Umgebung  $\Omega$  kann so gewählt werden, daß die folgenden Eigenschaften gelten:*

- *die Mannigfaltigkeit  $W_{\text{loc}}^s(0, \Omega)$  ist positiv invariant, d.h., es ist  $\Phi_t(W_{\text{loc}}^s(0, \Omega)) \subset W_{\text{loc}}^s(0, \Omega)$  für jedes  $t \geq 0$ ,*
- *es existieren  $K, \eta > 0$  sodaß gilt: wenn  $x_0 \in W_{\text{loc}}^s(0, \Omega)$ , dann  $\|\Phi_t(x_0)\| \leq Ke^{-\eta t} \|x_0\|$ ,*
- *jede Lösung, die für alle positiven Zeiten in  $\Omega$  verbleibt, liegt in  $W_{\text{loc}}^s(0, \Omega)$ .*

*Beweis.* Als Umgebung  $\Omega$  werden wir eine kleine Kugel  $B_r(0)$  mit Radius  $r$  bekommen, den wir demnächst angeben werden. Außerdem brauchen wir noch eine größere Kugel  $B_{r'}(0)$  mit  $r' > r$ .

Zunächst zerlegen wir  $f(x) = f'(0)x + g(x) = Ax + g(x)$  mit einem Rest  $g(x) = \mathfrak{o}(\|x\|)$ . Aus technischen Gründen werden wir den Rest  $g$  außerhalb von  $B_{r'}(0)$  (erheblich) abändern. Da wir beweisen werden, daß die uns interessierenden Lösungen die Menge  $B_{r'}(0)$  aber niemals verlassen, spüren diese Lösungen von den Änderungen an der Funktion  $g$  außerhalb von  $B_{r'}(0)$  nichts, sodaß diese Änderungen letztlich nicht relevant sind.

Konkret wählen wir uns eine Abschneidefunktion  $\chi \in C^\infty(\mathbb{R}^n; \mathbb{R})$  mit

$$\chi(x) = \begin{cases} 1: & |x| \leq 1, \\ 0: & |x| \geq 2, \end{cases}$$

und dann ersetzen wir die Funktion  $g = g(x)$  durch

$$g(x)\chi\left(\frac{x}{r'}\right).$$

Innerhalb von  $B_{r'}(0)$  hat sich nichts geändert, und außerhalb  $B_{2r'}(0)$  ist diese neue Funktion identisch Null. Wir merken uns für später, daß  $\|\nabla\chi(\cdot/r')\|_{L^\infty} \sim \frac{1}{r'}$ .

Wir haben eine Zerlegung  $\mathbb{R}^n = E_s \oplus E_u$  mit entsprechenden Projektoren  $P: \mathbb{R}^n \rightarrow E_s$  und  $Q = 1 - P: \mathbb{R}^n \rightarrow E_u$ . Dann kann man zeigen, daß

$$PA = AP, \quad QA = AQ.$$

Weiterhin: es existieren positive Konstanten  $C_0$  und  $\delta$  mit der Eigenschaft, daß

$$\begin{aligned} \|e^{At}P\| &\leq C_0 e^{-\delta t}, & \forall t \geq 0, \\ \|e^{At}Q\| &\leq C_0 e^{\delta t}, & \forall t \leq 0. \end{aligned} \tag{1.6}$$

Der Beweis läuft z.B. über die Jordan–Normalform von  $A$ . Die gesuchte Konstante  $\eta$  wählen wir als  $\eta = \delta/2$ , aber jede andere Zahl echt zwischen 0 und  $\delta$  wäre auch möglich.

Den Kreisradius  $r'$  wählen wir so klein, daß die geänderte Funktion  $g$  eine globale Lipschitz–Konstante auf  $\mathbb{R}^n$  von höchstens  $\delta/(8C_0)$  hat:

$$\|g\|_{\text{Lip}(\mathbb{R}^n)} \leq \frac{\delta}{8C_0}.$$

Wegen  $g(0) = 0$  haben wir dann die Abschätzung

$$\|g(x)\| \leq \frac{\delta}{8C_0} \|x\|, \quad x \in \mathbb{R}^n. \tag{1.7}$$

Nun sei  $x = x(t)$  eine Lösung, die für alle positiven Zeiten in  $\Omega = B_{r'}(0)$  verbleibt (wir werden gleich eine solche Lösung konstruieren). Dann gilt

$$x(t) = e^{At}x(0) + \int_{\tau=0}^t e^{A(t-\tau)}g(x(\tau)) \, d\tau.$$

Wir wenden die Projektoren an und bekommen:

$$\begin{aligned} x_s(t) &:= Px(t) = e^{At}Px(0) + \int_{\tau=0}^t e^{A(t-\tau)}Pg(x(\tau)) \, d\tau, \\ x_u(t) &:= Qx(t) = e^{At}Qx(0) + \int_{\tau=0}^t e^{A(t-\tau)}Qg(x(\tau)) \, d\tau. \end{aligned}$$

Wir formulieren die letzte Gleichung ein wenig um: Für  $0 \leq t \leq T$  haben wir ebenfalls

$$x_u(t) = e^{A(t-T)}Qx_u(T) + \int_{\tau=T}^t e^{A(t-\tau)}Qg(x(\tau)) \, d\tau.$$

Wir betrachten den ersten Summanden:

$$\left\| e^{A(t-T)}Qx_u(T) \right\| \leq \left\| e^{A(t-T)Q} \right\| \|x_u(T)\| \leq C_0 e^{\delta(t-T)} \|x_u(T)\|.$$

Wir lassen  $T$  nach  $+\infty$  streben und verwenden, daß  $x_u$  für alle Zeiten beschränkt ist:

$$x_u(t) = - \int_{\tau=t}^{\infty} e^{A(t-\tau)}Qg(x(\tau)) \, d\tau.$$

Die Konvergenz des Integrals für  $\tau \rightarrow \infty$  ist kein Problem wegen (1.6).

Damit haben wir insgesamt gezeigt:

**Wenn** eine Lösung  $x = x(t) = (x_s(t), x_u(t))$  für alle positiven Zeiten in  $B_{r'}(0)$  verbleibt, dann ist

$$\begin{aligned} x_s(t) &= e^{At}Px(0) + \int_{\tau=0}^t e^{A(t-\tau)}Pg(x(\tau)) \, d\tau, \\ x_u(t) &= - \int_{\tau=t}^{\infty} e^{A(t-\tau)}Qg(x(\tau)) \, d\tau. \end{aligned}$$

Ob es eine solche Lösung gibt, ist vorerst unklar. Deshalb definieren wir einen Operator  $T$ , der ein Paar  $(x_s, x_u)$  von Funktionen abbildet auf  $T(x_s, x_u)$  gemäß der Vorschrift

$$T(x_s, x_u) = \left( \begin{array}{l} e^{At}x_{s,0} + \int_{\tau=0}^t e^{A(t-\tau)}Pg(x_s(\tau) + x_u(\tau)) \, d\tau \\ - \int_{\tau=t}^{\infty} e^{A(t-\tau)}Qg(x_s(\tau) + x_u(\tau)) \, d\tau \end{array} \right),$$

und wir suchen ein für alle Zeiten beschränktes Paar von Funktionen  $(x_s, x_u)$  mit Werten in  $E_s \times E_u$ , sodaß  $(x_s, x_u) = T(x_s, x_u)$ . Dieses Fixpunktproblem untersuchen wir mit dem Banach-Fixpunktsatz. Unser Banachraum ist

$$X_\varrho = \left\{ h \in C([0, \infty), E_s \times E_u) : \sup_{t \geq 0} \|e^{\varrho t} h(t)\| < \infty \right\}, \quad 0 \leq \varrho \leq \eta,$$

mit der Norm  $\|h\|_\varrho = \sup_{t \geq 0} \|\exp(\varrho t)h(t)\|$ . Wir interessieren uns hierbei sowohl für  $\varrho = 0$  als auch  $\varrho = \eta$ .

Die Behauptung ist, daß es für jedes  $x_{s,0} \in \Omega_s = \Omega \cap E_s$  genau eine Funktion  $(x_s, x_u) \in X_\varrho$  gibt mit  $x_s(0) = x_{s,0}$  und  $T(x_s, x_u) = (x_s, x_u)$ .

Für die Anwendung des Banach FPS brauchen wir eine abgeschlossene Menge  $M \subset X_\varrho$ :

$$M = \{(h_s, h_u) \in X_\varrho : h_s(0) = x_{s,0}\}.$$

Hierbei sei  $x_{s,0}$  jetzt fixiert, und zwar ist  $\|x_{s,0}\| \leq r$ . Achtung: rechts steht kein  $r'$ , sondern ein  $r < r'$ .

Nun zeigen wir, daß  $T$  die Menge  $M$  in sich abbildet:

$$\begin{aligned}
 \|PT(x_s, x_u)\|_\varrho &= \sup_{t \geq 0} e^{\varrho t} \left\| e^{At} x_{s,0} + \int_{\tau=0}^t e^{A(t-\tau)} P g(x(\tau)) \, d\tau \right\| \\
 &\leq \sup_{t \geq 0} e^{\varrho t} C_0 e^{-\delta t} \|x_{s,0}\| + \sup_{t \geq 0} \int_{\tau=0}^t e^{\varrho t} C_0 e^{-\delta(t-\tau)} \|g(x(\tau))\| \, d\tau \\
 &\leq C_0 \|x_{s,0}\| + C_0 \sup_{t \geq 0} \int_{\tau=0}^t e^{\varrho t} e^{-\delta(t-\tau)} \|g\|_{\text{Lip}} \|x(\tau)\| \, d\tau \\
 &\leq C_0 \|x_{s,0}\| + C_0 \|g\|_{\text{Lip}} \|x\|_\varrho \sup_{t \geq 0} \int_{\tau=0}^t e^{\varrho(t-\tau)} e^{-\delta(t-\tau)} \, d\tau \\
 &\leq C_0 \|x_{s,0}\| + C_0 \frac{\delta}{8C_0} \|x\|_\varrho \frac{1}{\delta - \varrho} \\
 &\leq C_0 \|x_{s,0}\| + \frac{1}{4} \|x\|_\varrho,
 \end{aligned}$$

und für die andere Komponente haben wir

$$\begin{aligned}
 \|QT(x_s, x_u)\|_\varrho &= \sup_{t \geq 0} e^{\varrho t} \left\| \int_{\tau=t}^\infty e^{A(t-\tau)} Q g(x(\tau)) \, d\tau \right\| \\
 &\leq \sup_{t \geq 0} \int_{\tau=t}^\infty e^{\varrho t} C_0 e^{\delta(t-\tau)} \|g(x(\tau))\| \, d\tau \\
 &\leq C_0 \sup_{t \geq 0} \int_{\tau=t}^\infty e^{\varrho t} e^{\delta(t-\tau)} \|g\|_{\text{Lip}} \|x(\tau)\| \, d\tau \\
 &\leq C_0 \|g\|_{\text{Lip}} \|x\|_\varrho \sup_{t \geq 0} \int_{\tau=t}^\infty e^{\varrho(t-\tau)} e^{\delta(t-\tau)} \, d\tau \\
 &\leq C_0 \frac{\delta}{8C_0} \|x\|_\varrho \frac{1}{\delta + \varrho} \\
 &\leq \frac{1}{4} \|x\|_\varrho.
 \end{aligned}$$

Damit bekommen wir insgesamt

$$\|T(x_s, x_u)(t)\| \leq e^{-\varrho t} \left( C_0 \|x_{s,0}\| + \frac{1}{2} \|(x_s, x_u)\|_\varrho \right), \quad 0 \leq \varrho \leq \eta = \frac{\delta}{2}. \quad (1.8)$$

Die Kontraktion zeigt man genauso: seien  $x = (x_s, x_u)$  und  $\tilde{x} = (\tilde{x}_s, \tilde{x}_u)$  aus  $M$ , dann ist

$$\begin{aligned}
 \|PT(x_s, x_u) - PT(\tilde{x}_s, \tilde{x}_u)\|_\varrho &= \sup_{t \geq 0} e^{\varrho t} \left\| \int_{\tau=0}^t e^{A(t-\tau)} P (g(x(\tau)) - g(\tilde{x}(\tau))) \, d\tau \right\| \\
 &\leq \sup_{t \geq 0} \int_{\tau=0}^t e^{\varrho t} C_0 e^{-\delta(t-\tau)} \|g(x(\tau)) - g(\tilde{x}(\tau))\| \, d\tau \\
 &\leq C_0 \sup_{t \geq 0} \int_{\tau=0}^t e^{\varrho t} e^{-\delta(t-\tau)} \|g\|_{\text{Lip}} \|x(\tau) - \tilde{x}(\tau)\| \, d\tau \\
 &\leq C_0 \|g\|_{\text{Lip}} \|x - \tilde{x}\|_\varrho \sup_{t \geq 0} \int_{\tau=0}^t e^{\varrho(t-\tau)} e^{-\delta(t-\tau)} \, d\tau \\
 &\leq \frac{1}{4} \|x - \tilde{x}\|_\varrho,
 \end{aligned}$$

und entsprechend

$$\|QT(x_s, x_u) - QT(\tilde{x}_s, \tilde{x}_u)\|_\varrho \leq \frac{1}{4} \|x - \tilde{x}\|_\varrho.$$

Damit kontrahiert der Operator  $T$  auf der Menge  $M$  mit einer Kontraktionsrate  $\frac{1}{2} < 1$ , und also existiert ein Fixpunkt  $(x_s^*, x_u^*)$  von  $T$ . Wenn wir diesen in (1.8) einsetzen, bekommen wir

$$\|(x_s^*, x_u^*)\|_\varrho \leq 2C_0 \|x_{s,0}\| \leq 2C_0 r,$$

was man auch schreiben kann als

$$\|(x_s^*, x_u^*)(t)\| \leq 2C_0 r e^{-\varrho t}, \quad \forall t \geq 0, \quad \forall \varrho \in [0, \eta]. \quad (1.9)$$

Wenn wir jetzt  $r$  so wählen, daß  $2C_0 r \leq r'$  ist, dann haben wir garantiert, daß diese Lösung  $x^*$  für alle positiven Zeiten in  $B_{r'}(0)$  verbleibt.

Diese Lösung  $x^*$  hängt vom Startwert  $x_{s,0}$  ab, wir schreiben deshalb besser

$$x^*(t) = (x_s^*, x_u^*)(t; x_{s,0}).$$

Die gesuchte Funktion  $\psi$  ist dann  $\psi(x_{s,0}) = x_u^*(0, x_{s,0})$ . Wir haben gezeigt: wenn wir vom Punkt  $x(0) = (x_{s,0}, x_{u,0}) = (x_{s,0}, \psi(x_{s,0}))$  starten, dann verbleibt die Trajektorie für alle positiven Zeiten in  $B_{r'}(0)$ , und wir haben die Abklingabschätzung (1.9).

Man kann (mit einigem Aufwand) zeigen: der Fixpunkt einer parameterabhängigen Abbildung  $T$  hängt natürlich auch von diesen Parametern ab, und zwar genau so glatt wie die Abbildung  $T$ . Damit hängt  $x^*$  vom Parameter  $x_{s,0}$  einmal stetig differenzierbar ab, und somit ist  $\psi \in C^1(\Omega_s, E_u)$ , wie gewünscht.

Der Fixpunkt im Banach-FPS ist eindeutig, woraus wir ein wichtige Konsequenz ziehen: zu jedem  $x_{s,0} \in \Omega_s$  gibt es **genau ein**  $x_{u,0} \in E_u$ , nämlich genau  $x_{u,0} = \psi(x_{s,0})$ , sodaß die Trajektorie mit Startpunkt  $(x_{s,0}, x_{u,0})$  für alle positiven Zeiten in  $\Omega$  verbleibt.

Damit können wir jetzt den ersten  $\bullet$  beweisen: sei  $x_0 = (x_{s,0}, x_{u,0})$  aus  $W_{\text{loc}}^s(0, \Omega)$ . Dann ist der Vorwärtsorbit  $\gamma_+(x_0)$  in  $\Omega$  enthalten, nach obiger Konstruktion. Wir lassen eine Zeit  $t_*$  verstreichen und kommen bei einem Punkt  $\Phi_{t^*}(x_0)$  an. Das Endstück  $\gamma_+(\Phi_{t^*}(x_0))$  ist eine Teilmenge von  $\gamma_+(x_0)$ , also auch in  $\Omega$  enthalten. Weiterhin ist  $P\Phi_{t^*}(x_0) \in \Omega_s$ , also gibt es genau einen Punkt  $x_{u,t^*} \in E_u$ , nämlich  $\psi(P\Phi_{t^*}(x_0))$ , sodaß der Orbit ab  $(P\Phi_{t^*}(x_0), x_{u,t^*})$  für alle Zeiten in  $\Omega$  verbleibt. Weil es nun **genau einen** solchen Punkt  $x_{u,t^*} \in E_u$  gibt, und weil andererseits der Orbit ab  $\Phi_{t^*}(x_0)$  aber auch in  $\Omega_s$  verbleibt, muß

$$\Phi_{t^*}(x_0) = (P\Phi_{t^*}(x_0), x_{u,t^*}) = (P\Phi_{t^*}(x_0), \psi(P\Phi_{t^*}(x_0)))$$

sein. Also ist auch  $\Phi_{t^*}(x_0)$  in  $W_{\text{loc}}^s(0, \Omega)$  enthalten. Damit ist  $W_{\text{loc}}^s(0, \Omega)$  positiv invariant.

Der zweite  $\bullet$  läßt sich beweisen analog zu unserem Beweis von (1.9). Dafür wählen wir  $\varrho = \eta$  und unterlassen die Vergrößerung  $\|x_{s,0}\| \leq r$ .

Und für den dritten  $\bullet$  inspizieren wir nochmal unsere Ungleichungsmaschinerie und behalten dabei die Wahl  $\varrho = 0$  im Hinterkopf.  $\square$

Wir wollen als nächstes einige Informationen über  $\psi$  zusammentragen: sei dazu  $x = x(t) = (x_s(t), x_u(t))$  eine für alle Zeiten in  $B_{r'}(0)$  enthaltene Lösung, dann ist bekanntlich  $x_u(0) = \psi(x_s(0))$  und

$$x_u(t) = - \int_{\tau=t}^{\infty} e^{A(t-\tau)} Qg(x(\tau)) d\tau.$$

Daraus folgt direkt

$$\psi(x_s(0)) = x_u(0) = - \int_{\tau=0}^{\infty} e^{-A\tau} Qg(x(\tau)) d\tau.$$

Wir wählen nun  $r$  extrem klein und  $x_s(0) \in E_s \cap B_r(0)$  mit  $\|x_s(0)\| \sim r$ . Dann ist auch  $\|x(t)\| \leq 2C_0 r$  wegen (1.9), und somit ist  $\|g(x(\tau))\| = \mathfrak{o}(r)$ , weil  $g$  ein Rest von höherer als erster Ordnung ist. Damit haben wir dann

$$\|\psi(x_s(0))\| \leq \int_{\tau=0}^{\infty} \|e^{-A\tau} Q\| \mathfrak{o}(r) d\tau = \mathfrak{o}(r) = \mathfrak{o}(\|x_s(0)\|),$$

woraus wir  $\psi(0) = 0$  und  $\psi'(0) = 0$  bekommen. Also ist der Tangentialraum an  $W_{\text{loc}}^s(0, \Omega)$  im Nullpunkt gerade der stabile Unterraum  $E_s$  des linearisierten Problems.

Analoge Ergebnisse bekommt man für die instabile Mannigfaltigkeit  $W_{\text{loc}}^u(0, \Omega)$  durch Umkehr der Zeitrichtung und konsequente Vertauschung der Rollen der Indizes  $s$  und  $u$ .

Als Beispiel betrachten wir

$$\dot{x} = f(x), \quad f(0) = 0, \quad x \in \mathbb{R}^2$$

wobei  $x^* = (0, 0)^\top \in \mathbb{R}^2$  ein Sattelpunkt ist, das heißt, daß  $f'(0)$  einen positiven und einen negativen Eigenwert hat. Wir gehen über zu einem neuen Koordinatensystem durch eine Transformation

$$y = Px$$

mit einer geeigneten Matrix  $P \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ , und dann bekommen wir

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 &= \lambda_1 y_1 + g_1(y_1, y_2), & \lambda_1 < 0, \\ \dot{y}_2 &= \lambda_2 y_2 + g_2(y_1, y_2), & \lambda_2 > 0, \end{aligned}$$

mit  $g_1(0, 0) = g_2(0, 0) = 0$  sowie  $\nabla g_1(0, 0) = \nabla g_2(0, 0) = 0$ .

Der stabile bzw. der instabile Unterraum des linearisierten Systems sind gerade gegeben durch

$$\begin{aligned} E_s &= \{(y_1, y_2) : y_2 = 0\}, \\ E_u &= \{(y_1, y_2) : y_1 = 0\}, \end{aligned}$$

und die stabile bzw. die instabile Mannigfaltigkeit  $W_{\text{loc}}^s$  bzw.  $W_{\text{loc}}^u$  wird parametrisiert mit Parametern aus  $E_s$  bzw.  $E_u$ .

Zur Bestimmung von  $W_{\text{loc}}^s(0, \Omega)$  für eine kleine Umgebung  $\Omega$  von  $(0, 0)^\top$  erinnern wir uns, daß der Fluß  $\Phi_t$  in  $W_{\text{loc}}^s$  verbleiben muß, also muß der Flußvektor  $f$  tangential an  $W_{\text{loc}}^s$  verlaufen. Rechnerisch läuft das dann ab wie folgt:

Wir wissen, daß  $(y_1, y_2)$  in  $W_{\text{loc}}^s$  genau dann ist, wenn  $y_2 = \psi(y_1)$  ist. Wir leiten nach  $t$  ab und bekommen

$$\dot{y}_2(t) = \psi'(y_1) \cdot \dot{y}_1(t),$$

woraus sich nach Einsetzen der Differentialgleichungen (sowie Einsetzen von  $y_2 = \psi(y_1)$ ) ergibt:

$$\begin{aligned} \lambda_2 \psi(y_1) + g(y_1, \psi(y_1)) &= \psi'(y_1) (\lambda_1 y_1 + g_1(y_1, \psi(y_1))), \\ \psi(0) = 0, \quad \psi'(0) &= 0. \end{aligned}$$

Das ist ein Anfangswertproblem für  $\psi$ , was man im Prinzip lösen kann. Wir können es zwar in der Form

$$\psi'(y_1) = \frac{\lambda_2 \psi(y_1) + g(y_1, \psi(y_1))}{\lambda_1 y_1 + g_1(y_1, \psi(y_1))}$$

schreiben, sollten dabei aber beachten, daß die rechte Seite für den uns interessierenden Punkt  $y_1 = 0$  die Gestalt  $\frac{0}{0}$  annimmt. Typischerweise macht man für  $\psi$  einen Potenzreihenansatz und bestimmt die ersten Koeffizienten durch Koeffizientenvergleich.

Wir schauen uns dazu das akademische Beispiel

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}_1 &= -x_1, \\ \dot{x}_2 &= x_2 + x_1^2 \end{aligned} \right\} \quad (1.10)$$

an. Der Hauptteil ist bereits diagonalisiert, sodaß wir direkt den Ansatz  $x_2(t) = \psi(x_1(t))$  machen können. Wir leiten nach  $t$  ab und bekommen dann die Differentialgleichung

$$\psi(x_1) + x_1^2 = -\psi'(x_1)x_1$$

mit den Zusatzbedingungen  $\psi(0) = \psi'(0) = 0$ . Der Taylorreihenansatz

$$\psi(x_1) = \frac{1}{2}a_2x_1^2 + \frac{1}{3!}a_3x_1^3 + \dots$$

ergibt dann schnell  $\psi(x_1) = -\frac{1}{3}x_1^2$  als Lösung.

Und die instabile Mannigfaltigkeit bestimmen wir entsprechend: es ist  $(x_1, x_2) \in W_{\text{loc}}^u(0, \Omega)$  genau dann wenn  $x_1 = \phi(x_2)$  mit einer Funktion  $\phi$ , die wir noch zu bestimmen haben. Wir leiten nach  $t$  ab und bekommen dann die Differentialgleichung

$$-\phi(x_2) = \phi'(x_2) \cdot (x_2 + \phi^2(x_2))$$

mit den Zusatzbedingungen  $\phi(0) = \phi'(0) = 0$ . Wir sehen ziemlich schnell, daß  $\phi(x_2) = 0$  eine Lösung darstellt.

Zur Verifikation bestimmen wir die Lösung  $(x_1, x_2) = (x_1, x_2)(t)$  explizit. Bei diesem Spielzeugmodell ist das keine Schwierigkeit, und wir erhalten

$$\begin{aligned} x_1(t) &= e^{-t} x_{1,0}, \\ x_2(t) &= e^t \left( x_{2,0} + \frac{1}{3} x_{1,0}^2 \right) - \frac{1}{3} e^{-2t} x_{1,0}^2. \end{aligned}$$

Wir beobachten: wenn  $(x_1, x_2)(t)$  für alle positive Zeiten beschränkt sein soll, dann muß tatsächlich  $x_{2,0} + \frac{1}{3} x_{1,0}^2 = 0$  sein, wie es auch von der Funktion  $\psi$  vorhergesagt wurde.

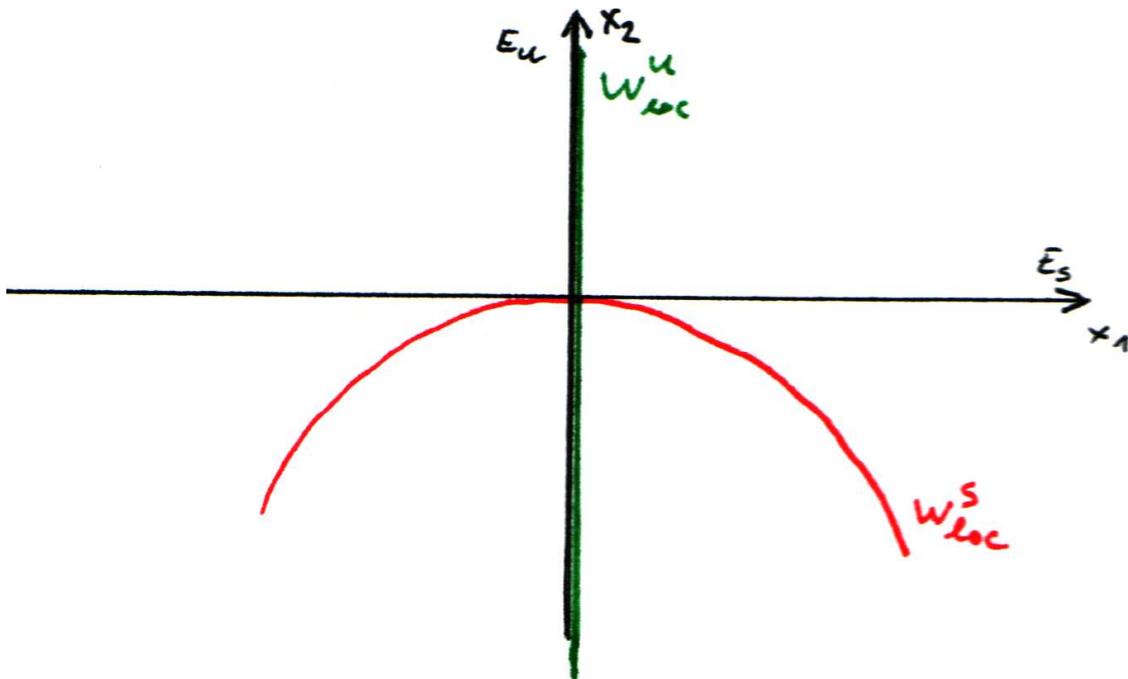


Abbildung 1.20: Stabile und instabile Mannigfaltigkeiten zu (1.10)

**Bemerkung 1.37.** Beim Versuch, lokale stabile/instabile Mannigfaltigkeiten zu globalen Mannigfaltigkeiten fortzusetzen, sind beliebige geometrische Komplikationen möglich.

Als Beispiel dafür betrachten wir das System

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = x_1 - x_1^2 \end{cases} \quad (1.11)$$

in der Nähe von  $(0, 0)^\top$ . Wir haben Eigenwerte  $\pm 1$  für die Matrix  $f'(0)$  der Linearisierung. Ein erstes Integral dieses Systems wird gegeben durch

$$H(x_1, x_2) = -\frac{1}{2}x_1^2 + \frac{1}{2}x_2^2 + \frac{1}{3}x_1^3,$$

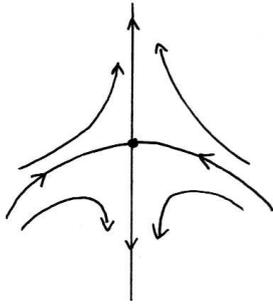


Abbildung 1.21: Phasenporträt zum System (1.10)

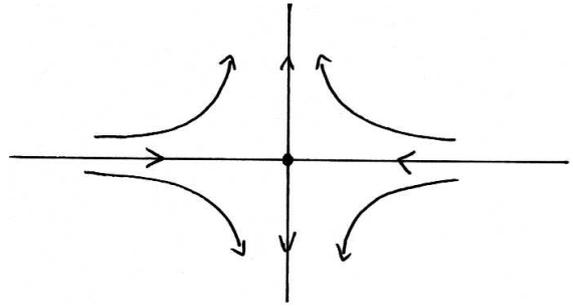


Abbildung 1.22: Phasenporträt zur linearisierten Variante von (1.10)

und entlang einer Lösungskurve ist  $\partial_t H(x_1(t), x_2(t)) = 0$ . Die Kurve  $H(x_1, x_2) = 0$  sieht aus wie in Abbildung 1.23, und die Schlaufe rechts gehört gleichzeitig zur *globalen* stabilen wie zur *globalen* instabilen Mannigfaltigkeit um  $(0, 0)^\top$ .

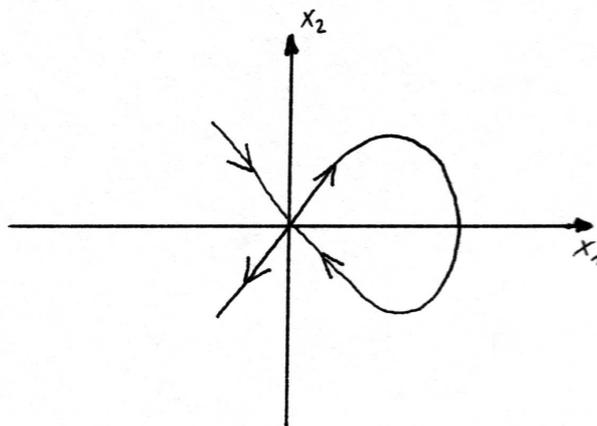


Abbildung 1.23:

## 1.12 Die Gleichung von FISHER

Wir untersuchen die Ausbreitung einer Population von Mikroorganismen. Diese besiedeln den  $\mathbb{R}^1$  und ihre Populationsdichte wird beschrieben durch eine Funktion  $u = u(t, x)$ . Wir nehmen an, daß  $u$  die Differentialgleichung

$$\partial_t u = \partial_x^2 u + ru(1 - u)$$

löst. Hierbei beschreibt  $\partial_x^2 u$  ein Diffusionsverhalten ähnlich wie bei der Wärmeleitungsgleichung oder BROWNSchen Bewegung, das die Neigung der Mikroorganismen zur Völkerwanderung beschreibt; und der Term  $ru(1 - u)$  ist wie beim logistischen Wachstum zu interpretieren. Der Faktor  $r$  ist natürlich eine positive Konstante. Wir haben die Einheiten so gewählt, daß  $u = 1$  die durch äußere Ressourcenbeschränkung vorgegebene Grenze darstellt, über der die Population sich nicht mehr vermehrt.

Triviale Lösungen sind natürlich  $u(t, x) \equiv 0$  und  $u(t, x) \equiv 1$ . Wir interessieren uns für Lösungen  $u$ , die überall Werte zwischen 0 und 1 annehmen. Eine Lösung  $u$ , die irgendwo negative Werte annimmt, wäre natürlich biologisch fragwürdig.

Da im allgemeinen die Lösung dieser partiellen Differentialgleichung nicht explizit angegeben werden kann,

beschränken wir uns auf den Fall von *wandernden Wellen*<sup>4</sup>, das heißt: wir suchen Lösungen mit der Form

$$u(t, x) = v(x - ct), \quad (t, x) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R},$$

wobei  $c$  eine Geschwindigkeitskonstante ist, und wir haben die Randbedingungen

$$\lim_{s \rightarrow -\infty} v(s) = 1, \quad \lim_{s \rightarrow +\infty} v(s) = 0.$$

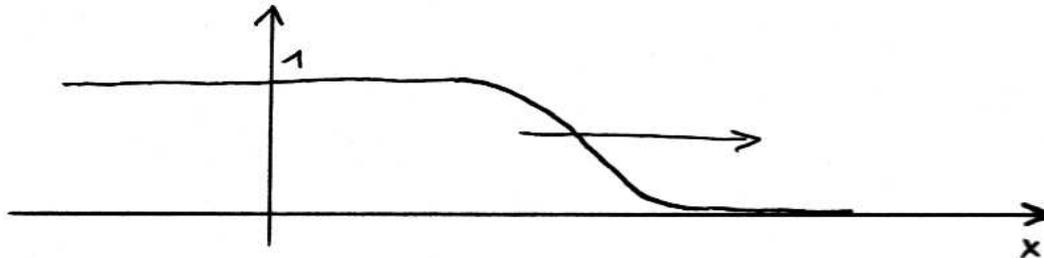


Abbildung 1.24: Wandernde Welle

Wenn wir mit diesem Ansatz in die Differentialgleichung für  $u$  gehen, bekommen wir

$$v''(s) + cv'(s) + rv(s)(1 - v(s)) = 0.$$

Die große Frage ist jetzt, ob es eine solche Funktion  $v$  überhaupt gibt. Mit den bisher entwickelten Methoden werden wir diese Frage positiv beantworten unter der Voraussetzung, daß  $c$  nicht zu klein ist.

Wir führen die üblichen Funktionen  $v_1(s) = v(s)$  und  $v_2(s) = v'(s)$  ein und bekommen dann

$$\partial_s \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_2 \\ -cv_2 - rv_1(1 - v_1) \end{pmatrix} = f(v_1, v_2).$$

Für Fixpunkte gilt  $f(v_1, v_2) = (0, 0)^\top$ , und wir erhalten die Punkte

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

als einzige Fixpunkte. Nun untersuchen wir die Jacobi-Matrix:

$$f'(v_1, v_2) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -r + 2rv_1 & -c \end{pmatrix}.$$

Für  $(v_1, v_2) = (0, 0)$  bekommen wir

$$f'(v_1, v_2) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -r & -c \end{pmatrix}$$

mit den beiden Eigenwerten  $\lambda_{1,2} = -\frac{c}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4}c^2 - r}$ . Unter der Annahme

$$\frac{c^2}{4} > r$$

sind diese beiden Eigenwerte negativ, und dieser Fixpunkt ist also ein Attraktor.

Und für  $(v_1, v_2) = (1, 0)$  bekommen wir

$$f'(v_1, v_2) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ r & -c \end{pmatrix}$$

---

<sup>4</sup>travelling wave solutions

mit den beiden Eigenwerten  $\lambda_{1,2} = -\frac{c}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4}c^2 + r}$ . Wegen  $\lambda_1 \cdot \lambda_2 = \det f' < 0$  ist also ein Eigenwert positiv und einer negativ, es liegt demnach ein Sattelpunkt vor.

Für die detailliertere Zeichnung des Phasenporträts nehmen wir als Beispiel  $r = 2$  und  $c = 3$ ; dann ergibt sich

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= 0.5616\dots && \text{mit normiertem Eigenvektor} && \begin{pmatrix} 0.872\dots \\ 0.4896\dots \end{pmatrix}, \\ \lambda_2 &= -3.5616\dots && \text{mit normiertem Eigenvektor} && \begin{pmatrix} -0.27\dots \\ 0.9628\dots \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Ein erstes Phasenporträt findet sich in Abbildung 1.25. Wenn es uns gelingt, einen Orbit zu finden (in

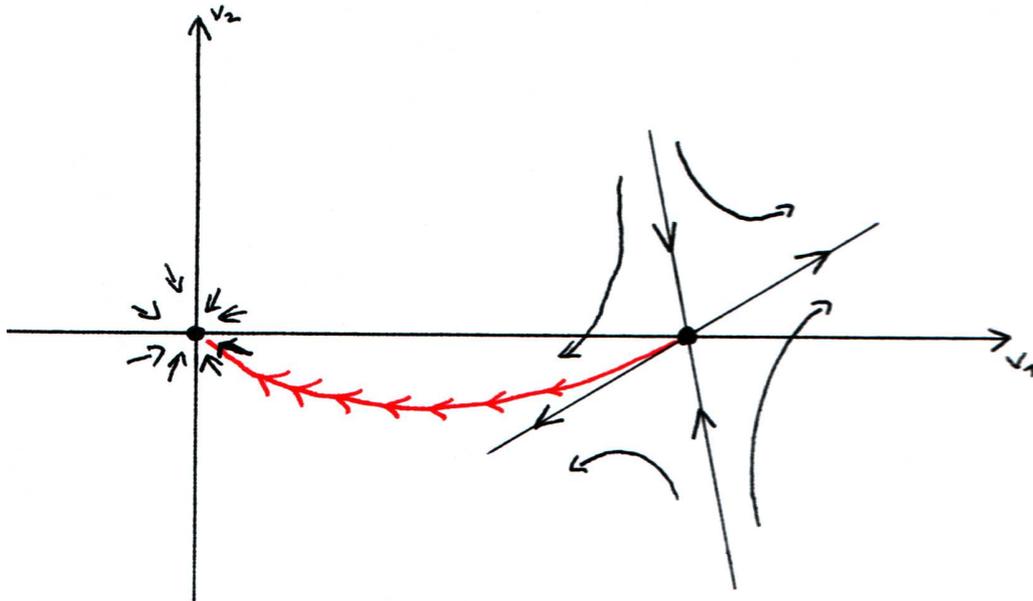


Abbildung 1.25:

der Abbildung rot), der den Punkt  $(1,0)^\top$  mit dem Punkt  $(0,0)^\top$  verbindet, dann sind wir fertig. Da dieser Orbit zwei verschiedene Fixpunkte verbindet, heißt er auch *heterokliner Orbit*. Offensichtlich ist es unmöglich, daß ein solcher Orbit zwei stabile Fixpunkte miteinander verbindet, oder daß er in einem stabilen Fixpunkt beginnt und an einem nichtstabilen Fixpunkt endet.

Man überlegt sich schnell: damit dieser rote Orbit im Punkt  $(1,0)^\top$  beginnen kann, muß er auf der *instabilen* Mannigfaltigkeit des Punktes  $(1,0)^\top$  liegen. Ansonsten würde die Trajektorie für  $s \rightarrow -\infty$  von dem Punkt  $(1,0)^\top$  abgestoßen werden.

Nun können wir allerdings die instabile Mannigfaltigkeit durch Taylorreihenentwicklung beliebig genau bestimmen, sodaß wir für einen Startpunkt auf dieser instabilen Mannigfaltigkeit dann einfach dem Orbit folgen können (z.B. durch numerisches Lösen der gewöhnlichen Differentialgleichung für  $v$ ), und dann kommen wir hoffentlich für  $s \rightarrow \infty$  im Punkt  $(0,0)^\top$  an.

Um zu zeigen, daß dieser rote Orbit tatsächlich existiert, betrachten wir dasjenige rechtwinklige Dreieck, das begrenzt wird von den Linien  $v_2 = 0$ ,  $v_1 = 1$  und  $v_2 = -\mu v_1$ , wobei  $\mu > 0$  noch zu wählen ist. Wir beweisen, daß dieses Dreieck positiv invariant unter dem Fluß zur Differentialgleichung  $\partial_s \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = f(v_1, v_2)$  ist. Da der rote Orbit auf jeden Fall in diesem Dreieck startet, ist er also beschränkt, und wir haben lediglich noch seine  $\omega$ -Limesmenge zu ermitteln.

Für den Beweis der Positiv-Invarianz genügt es, die Kanten des Dreiecks zu betrachten.

**Die Kante  $v_2 = 0$ :** Dann ist

$$\partial_s \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_2 \\ -cv_2 - rv_1(1 - v_1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ < 0 \end{pmatrix},$$

also zeigen die Flußlinien nach unten, also in das Dreieck hinein.

**Die Kante  $v_1 = 1$ :** Dann ist

$$\partial_s \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_2 \\ -cv_2 - rv_1(1 - v_1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} < 0 \\ > 0 \end{pmatrix},$$

also zeigen die Flußlinien nach links oben, also ebenfalls in das Dreieck hinein.

**Die Kante  $v_2 = -\mu v_1$ :** Für  $\mu \gg 1$  bekommen wir einen Flußvektor, der zum Vektor  $\begin{pmatrix} -1 \\ c \end{pmatrix}$  einen beliebig kleinen Winkel einschließt, und damit zeigt der Flußvektor auch in das Dreieck hinein.

Damit ist ein Orbit, der an einem Punkt  $(v_{1,0}, v_{2,0})^\top$  auf der instabilen Mannigfaltigkeit zum Punkt  $(1, 0)^\top$  startet, wobei  $v_{1,0} < 1$  und  $v_{2,0} < 0$  und  $\|(v_{1,0}, v_{2,0}) - (1, 0)\| \ll 1$ , beschränkt und in dem obigen Dreieck enthalten. Weiterhin haben wir für die Trajektorien zu diesem Orbit die Gleichung  $\partial_s v_1 = v_2 < 0$ , und somit wandert die Trajektorie im Diagramm „nach links“. Da sie das Dreieck nicht verlassen kann, muß sie den Punkt  $(0, 0)^\top$  anstreben.

## 1.13 Nulleigenwerte

Wir betrachten das akademische Beispielsystem

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= ax_1^k, \\ \dot{x}_2 &= -x_2 \end{aligned}$$

mit  $a \in \mathbb{R}$ ,  $k \in \mathbb{N}$  und  $k \geq 2$ . Egal welche Werte  $a$  und  $k$  haben, stets hat die Linearisierung die Eigenwerte 0 und  $-1$ . Das Stabilitätsverhalten des Systems wird ausschließlich vom Verhalten der Variablen  $x_1$  bestimmt.

Anhand der ersten Gleichung sehen wir:

**$k$  gerade,  $a > 0$ :** der Punkt  $(0, 0)^\top$  ist instabil (nimm  $x_1(0) > 0$ ),

**$k$  gerade,  $a < 0$ :** der Punkt  $(0, 0)^\top$  ist instabil (nimm  $x_1(0) < 0$ ).

Und für ungerade  $k$  betrachten wir  $\partial_t(x_1^2) = 2x_1\dot{x}_1 = 2ax_1^{k+1}$ , und wir sehen:

**$k$  ungerade,  $a < 0$ :** der Punkt  $(0, 0)^\top$  ist asymptotisch stabil,

**$k$  ungerade,  $a > 0$ :** der Punkt  $(0, 0)^\top$  ist instabil.

Ein solches Verhalten finden wir allerdings nicht nur in diesem akademischen Beispiel:

Sei  $f \in C^3(\mathbb{R}^2; \mathbb{R}^2)$  mit  $f(0) = 0$  und  $f'(0) = 0$ . Wir betrachten dann das System

$$\partial_t \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + f(x_1, x_2).$$

Um stationäre Punkte zu bestimmen, betrachten wir den unteren Teil der rechten Seite:

$$F(x_1, x_2) := -x_2 + f_2(x_1, x_2) \stackrel{!}{=} 0.$$

Wir haben  $F(0, 0) = 0$  sowie  $(\partial_{x_2} F)(0, 0) = -1 \neq 0$ ; also liefert der Satz über implizite Funktionen uns eine Funktion  $\psi = \psi(x_1)$ , definiert auf einem kleinen Intervall  $[-\delta, \delta]$ , sodaß

$$-\psi(x_1) + f_2(x_1, \psi(x_1)) = 0, \quad \psi(0) = 0.$$

Differenzieren nach  $x_1$  gibt uns  $\psi'(0) = 0$ .

**Satz 1.38.** Sei  $f_1(x_1, \psi(x_1)) = ax_1^k + \mathcal{O}(|x_1|^{k+1})$  für  $x_1 \rightarrow 0$  mit  $a \neq 0$  und  $k \in \mathbb{N}_+$ . Dann ist der Nullzustand stabil genau dann, wenn  $a < 0$  und  $k$  ungerade ist.

*Beweis.* Wir führen neue Variablen ein:

$$x_1 = y_1, \quad x_2 = y_2 + \psi(y_1).$$

Wenn ein stationärer Punkt vorliegt, dann muß  $x_2 = \psi(x_1)$  sein, also  $y_2 = 0$ .

Dann bekommen wir

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 &= \dot{x}_1 = f_1(x_1, x_2) = f_1(y_1, \psi(y_1) + y_2), \\ \dot{y}_2 &= \dot{x}_2 - \partial_t \psi(y_1) \\ &= -x_2 + f_2(x_1, x_2) - \psi'(y_1) \dot{y}_1 \\ &= -y_2 - \psi(y_1) + f_2(y_1, \psi(y_1) + y_2) - \psi'(y_1) f_1(y_1, \psi(y_1) + y_2) \\ &= -y_2 - f_2(y_1, \psi(y_1)) + f_2(y_1, \psi(y_1) + y_2) - \psi'(y_1) f_1(y_1, \psi(y_1) + y_2). \end{aligned}$$

Wenn wir die Funktionen

$$\begin{aligned} g_1(y_1, y_2) &= f_1(y_1, \psi(y_1) + y_2), \\ g_2(y_1, y_2) &= f_2(y_1, \psi(y_1) + y_2) - f_2(y_1, \psi(y_1)) - \psi'(y_1) f_1(y_1, \psi(y_1) + y_2) \\ &= f_2(y_1, \psi(y_1) + y_2) - f_2(y_1, \psi(y_1)) - \psi'(y_1) g_1(y_1, y_2) \end{aligned}$$

eingeführen, können wir das System umschreiben zu

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 &= g_1(y_1, y_2), \\ \dot{y}_2 &= -y_2 + g_2(y_1, y_2). \end{aligned}$$

Wir machen eine Taylor-Entwicklung:

$$\begin{aligned} g_1(y_1, y_2) &= f_1(y_1, \psi(y_1)) + \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(y_1, \psi(y_1) + \theta y_2) y_2 \quad (0 < \theta < 1) \\ &= a y_1^k + \mathcal{O}(|y_1|^{k+1}) + y_2 \mathcal{O}(\|y\|) \\ &= a y_1^k (1 + \mathcal{O}(\|y\|)) + y_2 \mathcal{O}(\|y\|), \\ g_2(y_1, y_2) &= \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(y_1, \psi(y_1) + \theta y_2) y_2 - \psi'(y_1) g_1(y_1, y_2) \\ &= y_2 \mathcal{O}(\|y\|) - \psi'(y_1) (a y_1^k (1 + \mathcal{O}(\|y\|)) + y_2 \mathcal{O}(\|y\|)) \\ &= y_2 \mathcal{O}(\|y\|) + \mathcal{O}(|y_1|^{k+1}). \end{aligned}$$

Nun betrachten wir die Funktion

$$V = V(y_1, y_2) = -\frac{1}{a(k+1)} y_1^{k+1} + \frac{1}{2} y_2^2.$$

Wir erinnern uns an die YOUNG'sche Ungleichung:  $|ab| \leq \frac{1}{2}(a^2 + b^2)$ , also auch  $|y_1^k y_2| \leq \frac{1}{2}(y_1^{2k} + y_2^2)$ . Damit haben wir dann

$$\begin{aligned} \partial_t V &= \frac{\partial V}{\partial y_1} \dot{y}_1 + \frac{\partial V}{\partial y_2} \dot{y}_2 \\ &= -\frac{1}{a} y_1^k g_1(y_1, y_2) + y_2 (-y_2 + g_2(y_1, y_2)) \\ &= -y_1^{2k} (1 + \mathcal{O}(\|y\|)) + y_1^k y_2 \mathcal{O}(\|y\|) - y_2^2 + y_2^2 \mathcal{O}(\|y\|) + y_2 \mathcal{O}(|y_1|^{k+1}) \\ &= -y_1^{2k} (1 + \mathcal{O}(\|y\|)) + y_1^k y_2 \mathcal{O}(\|y\|) - y_2^2 + y_2^2 \mathcal{O}(\|y\|) \\ &= -y_1^{2k} - y_2^2 + \mathcal{O}(y_1^{2k} + y_2^2) \mathcal{O}(\|y\|). \end{aligned}$$

Damit ist  $\partial_t V < 0$  für kleine  $\|y\|$ .

Falls nun  $a < 0$  und  $k$  ungerade ist, dann ist  $V$  eine positiv definite Funktion; und die Stabilität ergibt sich dann aus dem Satz von Lyapunov.

Und falls nun  $a > 0$  sein sollte (und  $k$  ungerade), dann gibt es in der Umgebung von  $(y_1, y_2) = (0, 0)$  Punkte mit  $V(y_1, y_2) < 0$ . Falls der Startpunkt dort liegt, wird die Trajektorie abgestoßen von  $(0, 0)$ . Analog argumentiert man für gerades  $k$ .  $\square$

Allgemeiner läßt sich folgender Satz zeigen, auf dessen Beweis wir verzichten:

**Satz 1.39.** *Betrachte das System*

$$\partial_t \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + f(x_1, x_2)$$

mit  $f \in C^3(\mathbb{R}^2; \mathbb{R}^2)$  und  $f(0) = 0$ ,  $f'(0) = 0$ . Wir definieren eine Funktion  $\psi$  durch

$$-\psi(x_1) + f_2(x_1, \psi(x_1)) = 0, \quad |x_1| \leq \delta.$$

Dann ist  $(0, 0)^\top$  stabil bzw. asymptotisch stabil bzw. instabil genau dann wenn  $x_1^* = 0$  ein stabiler bzw. asymptotisch stabiler bzw. instabiler Punkt zur skalaren Differentialgleichung

$$\dot{x}_1 = f_1(x_1, \psi(x_1))$$

ist.

## 1.14 Bifurkationen

In die Systeme des vorigen Abschnitts führen wir Parameter  $\lambda \in \mathbb{R}^m$  ein:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = F_1(\lambda, x_1, x_2), \\ \dot{x}_2 = -x_2 + F_2(\lambda, x_1, x_2), \end{cases} \quad (1.12)$$

wobei  $F(0, x_1, x_2) = f(x_1, x_2)$  mit  $f(0) = 0$  und  $f'(0) = 0$ . Für  $\lambda = 0$  bekommen wir Systeme wie zuvor.

Die Frage ist, wie sich das Stabilitätsverhalten des Systems ändert, wenn  $\lambda$  variiert.

Zunächst suchen wir stationäre Punkte. Dazu schreiben wir

$$H = H(\lambda, x_1, x_2) = -x_2 + F_2(\lambda, x_1, x_2) \stackrel{!}{=} 0.$$

Wir haben  $H(0, 0, 0) = 0$  sowie  $(\partial_{x_2} H)(0, 0, 0) = -1 \neq 0$ , also existiert eine Funktion  $x_2 = \psi(\lambda, x_1)$  für  $\|\lambda\| \leq \lambda_0 \ll 1$  und  $|x_1| \leq \delta$  mit

$$-\psi(\lambda, x_1) + F_2(\lambda, x_1, \psi(x_1)) = 0.$$

Ableitung nach  $x_1$  liefert dann

$$(\partial_{x_1} \psi)(0, 0) = 0.$$

Damit ist dann ein Punkt  $(x_1^*, x_2^*)$  ein Fixpunkt genau dann, wenn  $x_2^* = \psi(\lambda, x_1^*)$  sowie  $F_1(\lambda, x_1^*, \psi(\lambda, x_1^*)) = 0$ .

**Definition 1.40.** *Sei  $\psi$  bestimmt wie eben. Die Funktion*

$$G = G(\lambda, x_1) := F_1(\lambda, x_1, \psi(\lambda, x_1))$$

heißt Bifurkationsfunktion, und die Gleichung

$$G(\lambda, x_1) \stackrel{!}{=} 0$$

heißt Bifurkationsgleichung.

Wir vermuten für  $\lambda = 0$ , daß sich  $x_2$  deutlich schneller ändert als  $x_1$ , im Sinne von  $\dot{x}_2 \approx -x_2$ , wohingegen  $\dot{x}_1 = \mathcal{O}(\|x\|^2)$ . In diesem Sinne wäre  $x_2$  die „schnelle Variable“, und  $x_1$  wäre die „langsame Variable“. In den Zeiteinheiten der langsamen Variable  $x_1$  gedacht, hoffen wir, daß  $x_2$  schon seine Ruhelage erreicht hat (nämlich  $\psi(\lambda, x_1)$ ), wenn  $x_1$  sich endlich mal nennenswert ändert.

Diese sehr heuristischen Überlegungen schlagen uns vor, stationäre Punkte der skalaren Gleichung

$$\dot{x}_1 = G(\lambda, x_1)$$

zu suchen. Diese stationären Punkte liefern uns dann auch direkt stationäre Punkte für das System (1.12).

Als akademisches Beispiel betrachten wir das System

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \lambda + x_1^2, \\ \dot{x}_2 = -x_2, \end{cases} \quad (1.13)$$

also  $F_1(\lambda, x_1, x_2) = \lambda + x_1^2$  und  $F_2(\lambda, x_1, x_2) = 0$ . Wir haben dann  $-\psi(\lambda, x_1) + F_2(\lambda, x_1, \psi(\lambda, x_1)) \stackrel{!}{=} 0$ , also  $\psi(\lambda, x_1) \equiv 0$ ; und die Bifurkationsfunktion lautet

$$G(\lambda, x_1) = \lambda + x_1^2.$$

Nun stellen wir fest:

**Wenn**  $\lambda > 0$ , dann hat die Bifurkationsgleichung  $G(\lambda, x_1) = 0$  keine Lösung  $x_1$ ,

**Wenn**  $\lambda = 0$ , dann hat die Bifurkationsgleichung  $G(\lambda, x_1) = 0$  nur die Lösung  $x_1 = 0$ ,

**Wenn**  $\lambda < 0$ , dann hat die Bifurkationsgleichung  $G(\lambda, x_1) = 0$  die beiden Lösungen  $x_1 = \pm\sqrt{-\lambda}$ .

Die skalare Gleichung  $\dot{x}_1 = G(\lambda, x_1)$  hat für  $\lambda < 0$  zwei stationäre Punkte  $x_-^*$  und  $x_+^*$ . Die dort linearisierten Systeme sind dann  $\partial_t y = 2x_\pm^* y$ , wobei  $x = x_\pm^* + y$ . Also ist ein Fixpunkt (nämlich  $x_-^*$ ) asymptotisch stabil, und der andere ist instabil.

Die Beobachtungen aus diesem Beispiel lassen sich formalisieren:

**Satz 1.41.** *Sei  $\psi$  definiert durch*

$$-\psi(\lambda, x_1) + F_2(\lambda, x_1, \psi(\lambda, x_1)) = 0,$$

für  $\|\lambda\| \leq \lambda_0$  und  $|x_1| \leq \delta$ . Es sei  $G(\lambda^*, x_1^*) = 0$ , mit  $|x_1^*| < \delta$ ,  $|\psi(\lambda^*, x_1^*)| < \delta$ ,  $\|\lambda^*\| < \lambda_0$ .

Dann gilt, unter der Voraussetzung  $\lambda_0 \ll 1$ ,  $\delta \ll 1$ :

- Wenn  $\frac{\partial G}{\partial x_1}(\lambda^*, x_1^*) < 0$ , dann ist  $(x_1^*, \psi(\lambda^*, x_1^*))$  ein stabiler Knoten oder stabiler Strudel.
- Wenn  $\frac{\partial G}{\partial x_1}(\lambda^*, x_1^*) > 0$ , dann ist  $(x_1^*, \psi(\lambda^*, x_1^*))$  ein Sattelpunkt.

*Beweis.* Wie zuvor, definieren wir neue Koordinaten

$$x_1 = y_1, \quad x_2 = y_2 + \psi(\lambda^*, y_1).$$

Ein stationärer Punkt  $(x_1^*, x_2^*) = (x_1^*, \psi(\lambda^*, x_1^*))$  wird dann in den neuen Koordinaten zu  $(y_1^*, y_2^*) = (x_1^*, 0)$ . Als Differentialgleichungen erhalten wir

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 &= \dot{x}_1 = F_1(\lambda^*, x_1, x_2) = F_1(\lambda^*, y_1, \psi(\lambda^*, y_1) + y_2), \\ \dot{y}_2 &= \dot{x}_2 - \partial_t \psi(\lambda^*, x_1) \\ &= -x_2 + F_2(\lambda^*, x_1, x_2) - \frac{\partial \psi}{\partial x_1}(\lambda^*, x_1) \dot{x}_1 \\ &= -x_2 + F_2(\lambda^*, y_1, \psi(\lambda^*, y_1) + y_2) - \frac{\partial \psi}{\partial x_1}(\lambda^*, x_1) F_1(\lambda^*, y_1, \psi(\lambda^*, y_1) + y_2) \\ &= -y_2 - \psi(\lambda^*, y_1) + F_2(\lambda^*, y_1, \psi(\lambda^*, y_1) + y_2) - \frac{\partial \psi}{\partial x_1}(\lambda^*, x_1) F_1(\lambda^*, y_1, \psi(\lambda^*, y_1) + y_2) \\ &= -y_2 - F_2(\lambda^*, y_1, \psi(\lambda^*, y_1)) + F_2(\lambda^*, y_1, \psi(\lambda^*, y_1) + y_2) - \frac{\partial \psi}{\partial x_1}(\lambda^*, x_1) F_1(\lambda^*, y_1, \psi(\lambda^*, y_1) + y_2). \end{aligned}$$

Dieses System schreiben wir in der Form

$$\partial_t \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = H(y_1, y_2),$$

wobei  $H$  eine Funktion von  $\mathbb{R}^2$  nach  $\mathbb{R}^2$  beschreibt. Für die Stabilitätsuntersuchung dieses Systems betrachten wir die Jacobi-Matrix  $A$  von  $H$ , ausgewertet am Punkt  $(y_1, y_2) = (x_1^*, 0) = (y_1^*, 0)$ . Zur Übersichtlichkeit der Schreibweise vereinbaren wir, daß die Argumente von  $G$  und  $F_j$  gerade  $(\lambda^*, y_1^*)$  bzw.  $(\lambda^*, y_1^*, \psi(\lambda^*, y_1^*))$  sind. Dann haben wir als Jacobi-Matrix

$$A = \begin{pmatrix} \frac{\partial G}{\partial y_1} & \frac{\partial F_1}{\partial y_2} \\ 0 - \frac{\partial \psi}{\partial y_1} \cdot \frac{\partial G}{\partial y_1} & -1 + \frac{\partial F_2}{\partial y_2} - \frac{\partial \psi}{\partial y_1} \cdot \frac{\partial F_1}{\partial y_2} \end{pmatrix},$$

für deren Eigenwerte wir uns interessieren. Im Falle von  $(\lambda^*, x_1^*) = (0, 0)$  haben wir als Eigenwerte gerade 0 und  $-1$ . Eigenwerte einer Matrix hängen stetig von der Matrix ab. Wenn nun  $\|\lambda\| \leq \lambda_0 \ll 1$  und  $|x_1^*| \leq \delta \ll 1$  sind, dann liegen die Eigenwerte von  $A$  in der Nähe von 0 bzw.  $-1$ . Um die Stabilität des Systems für  $y$  zu verstehen, reicht es aus herauszufinden, was aus dem Nulleigenwert geworden ist, nachdem sich das  $\lambda$  geändert hat. Das Produkt der Eigenwerte ist gleich der Determinante von  $A$ ; also brauchen wir nur das Vorzeichen der Determinante von  $A$  zu bestimmen. Nun stellen wir schnell fest, daß

$$\begin{aligned} \det A &= \frac{\partial G}{\partial y_1} \left( -1 + \frac{\partial F_2}{\partial y_2} - \frac{\partial \psi}{\partial y_1} \cdot \frac{\partial F_1}{\partial y_2} + \frac{\partial \psi}{\partial y_1} \cdot \frac{\partial F_1}{\partial y_2} \right) \\ &= \frac{\partial G}{\partial y_1} \left( -1 + \frac{\partial F_2}{\partial y_2} \right). \end{aligned}$$

Nun ist  $F_2(0, x)$  mindestens quadratisch klein in  $x$ , also ist für kleine  $\lambda_0$  und  $\delta$  der Summand  $\frac{\partial F_2}{\partial y_2}$  betragskleiner als 1, sodaß  $\det A$  das entgegengesetzte Vorzeichen von  $\frac{\partial G}{\partial y_1}$  hat.

Wenn  $\frac{\partial G}{\partial y_1}(\lambda^*, x_1^*) < 0$ , dann sind beide Eigenwerte von  $A$  negativ. Und wenn  $\frac{\partial G}{\partial y_1}(\lambda^*, x_1^*) > 0$ , dann ist ein Eigenwert von  $A$  positiv, der andere negativ.  $\square$

Mit ähnlichen Methoden kann man folgendes Ergebnis beweisen:

**Satz 1.42.** *Wir betrachten das System*

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= F_1(\lambda, x_1, x_2), \\ \dot{x}_2 &= -x_2 + F_2(\lambda, x_1, x_2), \end{aligned}$$

wobei  $F(0, x_1, x_2) = f(x_1, x_2)$  mit  $f(0) = 0$  und  $f'(0) = 0$ . Es sei

$$\frac{\partial F_1}{\partial \lambda}(0, 0, 0) \neq 0, \quad \frac{\partial^2 F_1}{\partial x_1^2}(0, 0, 0) \neq 0.$$

Dann gilt:

- Für  $\lambda$  mit  $\lambda \frac{\partial F_1}{\partial \lambda} \cdot \frac{\partial^2 F_1}{\partial x_1^2} < 0$  gibt es zwei Gleichgewichtslagen, von denen eine ein Sattel ist und die andere asymptotisch stabil.
- Für  $\lambda$  mit  $\lambda \frac{\partial F_1}{\partial \lambda} \cdot \frac{\partial^2 F_1}{\partial x_1^2} > 0$  gibt es keine Gleichgewichtslagen.

Eine Modellgleichung für diesen Satz ist genau (1.13).

Diese Ergebnisse stehen in engem Zusammenhang mit der **Sattelknotenbifurkation**, deren Prototyp durch die skalare Differentialgleichung

$$\dot{x} = \lambda - x^2$$

gegeben ist. Man stellt schnell fest:

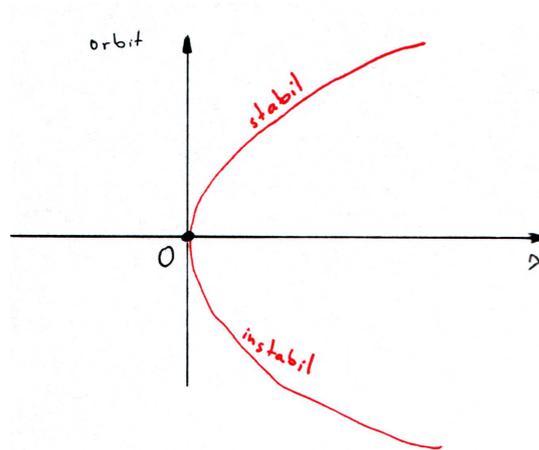


Abbildung 1.26: Sattelknotenbifurkation

- Für  $\lambda < 0$  gibt es kein Gleichgewicht.
- Für  $\lambda = 0$  gibt es genau ein Gleichgewicht,  $x = 0$ .
- Für  $\lambda > 0$  gibt es zwei Gleichgewichte, nämlich  $\pm\sqrt{\lambda}$ , von denen eines stabil ist, das andere nicht.

Es gibt eine ganze Reihe von Bifurkationen, wir listen einige der einfacheren auf:

Die **Heugabel-Bifurkation**<sup>5</sup> hat als Prototyp die skalare Differentialgleichung

$$\dot{x} = \lambda x + \alpha x^3, \quad \alpha = \pm 1.$$

Für  $\alpha = +1$  spricht man von einer *subkritischen Bifurkation*, und für  $\alpha = -1$  spricht man von einer *superkritischen Bifurkation*. Die Gleichgewichtslagen sind  $x_1^* = 0$  und  $x_2^* = \pm\sqrt{-\lambda/\alpha}$ .

Die Heugabel-Bifurkation mit  $\alpha = -1$  tritt zum Beispiel bei der EULERSchen Knicklast auf: ein Pfahl steht vertikal und ist unten einbetoniert. Von oben drückt eine Last senkrecht nach unten. Wenn diese Last klein ist, dann bleibt der Pfahl aufrecht, und diese Lage ist stabil. Wenn die Last einen bestimmten Wert übersteigt (also die Knicklast überschritten wird), dann wird diese aufrechte Konfiguration instabil, und stattdessen biegt sich der Pfahl durch (nach links oder rechts). Diese gebogenen Konfigurationen sind ihrerseits stabil.

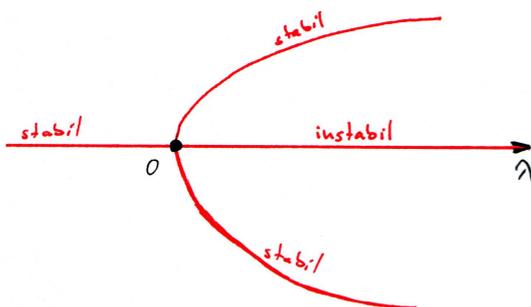


Abbildung 1.27: Heugabelbifurkation mit  $\alpha = -1$

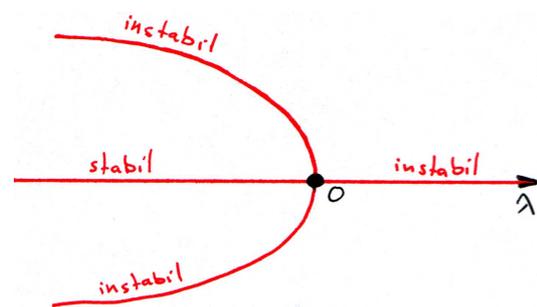


Abbildung 1.28: Heugabelbifurkation mit  $\alpha = +1$

Die **transkritische Bifurkation** hat als Prototypen die skalare Differentialgleichung

$$\dot{x} = \lambda x - x^2.$$

<sup>5</sup>pitchfork bifurcation

Gleichgewichtslagen sind offensichtlich  $x_1^* = 0$  und  $x_2^* = \lambda$ . Wir beobachten:

- Für  $\lambda < 0$  ist  $x_1^* = 0$  stabil und  $x_2^* = \lambda$  instabil.
- Für  $\lambda > 0$  ist  $x_1^* = 0$  instabil und  $x_2^* = \lambda$  stabil.

Einer Variante dieser Bifurkation sind wir beim diskreten logistischen Wachstum schon begegnet.

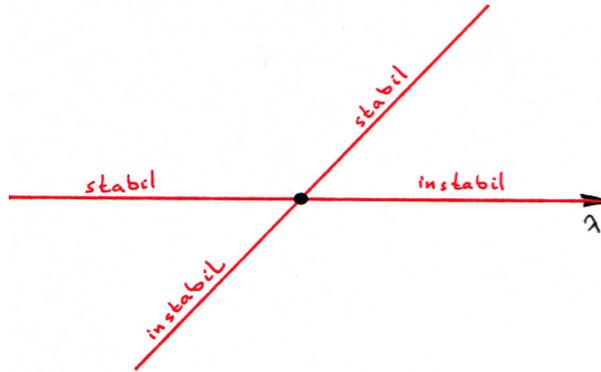


Abbildung 1.29: Transkritische Bifurkation

Bei den obigen Bifurkationen wurde entweder ein Paar von Gleichgewichten geboren (eines stabil, das andere instabil), oder Gleichgewichtspunkte kollidierten und wechselten ihren Typ. Für eindimensionale  $x$  sind andere Verhalten im Allgemeinen nicht zu beobachten.

Als nächstes wollen wir mit  $x$  in den  $\mathbb{R}^2$  gehen, wo weitere Möglichkeiten sich auftun. Insbesondere interessieren wir uns für den Fall, daß ein stabiler Strudel sich umwandelt in einen stabilen periodischen Orbit und einen instabilen Punkt. Dies ist die sogenannte **Poincaré–Andronov–Hopf–Bifurkation**. Bevor wir diese behandeln können, müssen wir etwas weiter ausholen und theoretische Grundlagen bereitstellen.

## 1.15 Rein imaginäre Eigenwerte

Wir betrachten das System

$$\dot{x} = Ax + f(x),$$

wobei wir uns  $f$  als parameterabhängig vorstellen. Die Eigenwerte von  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$  sollen auf der imaginären Achse  $i\mathbb{R}$  liegen. Durch eine Transformation auf die reelle Jordansche Normalform (siehe Lemma 1.29) und Skalieren der Zeitvariablen können wir dann immer folgende Gestalt erzielen:

$$\partial_t \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + f(x),$$

mit geändertem  $f$ . Im Unterschied zu bisherigen Betrachtungen wollen wir diesmal erlauben, daß  $f$  auch lineare Anteile enthält. Um trotzdem sicherzustellen, daß  $f$  ein „nachrangiger Term“ im Vergleich zu  $Ax$  ist, verlangen wir, daß

$$f(0) = 0, \quad \|f'(0)\| < 1.$$

Hierbei ist  $\|f'(0)\|$  die Matrix–Norm von  $f'(0)$ , von der wir verlangen, daß sie zur Vektornorm auf dem  $\mathbb{R}^2$  kompatibel ist, also:

$$\|B\|_{\mathbb{R}^n \times n} := \sup \frac{\|Bx\|_{\mathbb{R}^n}}{\|x\|_{\mathbb{R}^n}},$$

für eine Vektornorm  $\|\cdot\|_{\mathbb{R}^n}$ . Im Falle der gewöhnlichen pythagoräischen Norm  $\|x\|_{\mathbb{R}^n} := \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}$  kann man zeigen, daß die zugeordnete Matrixnorm gerade

$$\|B\|_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n} = \sqrt{\lambda_{\max}(B^\top B)}$$

ist, wobei  $\lambda_{\max}(B^\top B)$  den größten Eigenwert der positiv semi-definiten Matrix  $B^\top B$  bezeichnet.

Weil andererseits  $\|A\|_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n}$  gleich eins ist (in der Pythagoras-Norm), können wir immer noch  $Ax$  als Hauptteil betrachten und  $f(x)$  als Restterm.

Es empfiehlt sich, Polarkoordinaten einzuführen. Da nun die der Matrix  $A$  zugeordnete Abbildung eine Rechtsdrehung um  $\pi/2$  ist, passen wir die Definition der Polarkoordinaten entsprechend an (diese andere Wahl der Polarkoordinaten hat lediglich ästhetische Auswirkungen):

$$x_1 = r \cos \theta, \quad x_2 = -r \sin \theta.$$

Wir schreiben das System  $\dot{x} = Ax + f(x)$  um in den neuen Variablen:

$$\begin{aligned} r^2 &= x_1^2 + x_2^2, \\ 2r\dot{r} &= 2x_1\dot{x}_1 + 2x_2\dot{x}_2, \\ \dot{r} &= \frac{x_1}{r}\dot{x}_1 + \frac{x_2}{r}\dot{x}_2 \\ &= \cos \theta \cdot (x_2 + f_1) - \sin \theta \cdot (-x_1 + f_2) \\ &= \cos \theta \cdot f_1(r \cos \theta, -r \sin \theta) - \sin \theta \cdot f_2(r \cos \theta, -r \sin \theta) =: R(r, \theta), \\ \cos \theta &= \frac{x_1}{r}, \\ -\sin \theta \cdot \dot{\theta} &= \frac{1}{r}\dot{x}_1 - \frac{x_1}{r^2}\dot{r} \\ &= \frac{1}{r}(x_2 + f_1) - \frac{x_1}{r^2}(\cos \theta \cdot f_1 - \sin \theta \cdot f_2) \\ &= \frac{1}{r}(-r \sin \theta + f_1) - \frac{\cos \theta}{r}(\cos \theta \cdot f_1 - \sin \theta \cdot f_2) \\ &= -\sin \theta + \sin^2 \theta \cdot \frac{f_1}{r} + \frac{\cos \theta \sin \theta}{r} f_2, \\ \dot{\theta} &= 1 - \frac{\sin \theta}{r} f_1(r \cos \theta, -r \sin \theta) - \frac{\cos \theta}{r} f_2(r \cos \theta, -r \sin \theta) =: 1 + \Theta(r, \theta). \end{aligned}$$

Die letzte Rechnung ist zulässig für  $r > 0$ . Wir definieren  $\Theta(0, \theta)$  als Grenzwert für  $r \rightarrow +0$  und bekommen dann

$$\Theta(0, \theta) = (\sin \theta \quad \cos \theta) f'(0) \begin{pmatrix} -\cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix}.$$

Wir stellen fest, daß

$$R(0, \theta) = 0, \quad |\Theta(0, \theta)| < 1,$$

also ist aus Stetigkeitsgründen  $\dot{\theta}(t)$  immer positiv, zumindest für kleine  $r$ . Dann ist die Abbildung  $t \mapsto \theta$  umkehrbar, also kann man umstellen  $t = t(\theta)$ , und nach Einsetzen kann man  $r$  als Funktion von  $\theta$  betrachten, und man erhält

$$\frac{dr}{d\theta} = \frac{R(r, \theta)}{1 + \Theta(r, \theta)}.$$

Man beachte, daß die rechte Seite  $2\pi$ -periodisch ist als Funktion von  $\theta$ , und die rechte Seite ist gleich 0 für  $r = 0$ . Wenn wir diese Differentialgleichung lösen können, dann haben wir die Orbits der Differentialgleichung  $\dot{x} = Ax + f(x)$  bestimmt, in der Nähe von  $x = 0$ .

Als Beispiel betrachten wir einen **gedämpften Oszillator**:

$$\ddot{y} + y^2 \dot{y} + y = 0.$$

Die Substitution  $x_1 = y$ ,  $x_2 = \dot{y}$  führt uns dann auf

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= -x_1 - x_1^2 x_2.\end{aligned}$$

Wir bekommen also  $f_1 = 0$  und  $f_2 = -x_1^2 x_2$ . Dann folgt nach obigem Schema

$$\begin{aligned}R(r, \theta) &= -r^3 \cos^2 \theta \sin^2 \theta, \\ \Theta(r, \theta) &= -r^2 \cos^3 \theta \sin \theta, \\ \frac{dr}{d\theta} &= -(\cos^2 \theta \sin^2 \theta) r^3 + \mathcal{O}(r^4) \\ &= -\frac{1}{8}(1 - \cos(4\theta)) r^3 + \mathcal{O}(r^4).\end{aligned}$$

Den ersten Term auf der rechten Seite wollen wir unabhängig von  $\theta$  haben. Dazu transformieren wir wie folgt:

$$r = \varrho + a(\theta)\varrho^3, \quad 0 \leq r \ll 1,$$

wobei  $a = a(\theta)$  eine noch wählbare Funktion ist. Aus dem Satz über implizite Funktionen erfahren wir, daß diese Transformation umkehrbar ist für kleine  $\varrho$  bzw. kleine  $r$ . Damit haben wir dann

$$\begin{aligned}-\frac{1}{8}(1 - \cos(4\theta))r^3 + \mathcal{O}(r^4) \\ = \frac{dr}{d\theta} = \frac{\partial r}{\partial \varrho} \cdot \frac{d\varrho}{d\theta} + \frac{\partial r}{\partial \theta} \\ = (1 + 3a(\theta)\varrho^2) \frac{d\varrho}{d\theta} + a'(\theta)\varrho^3,\end{aligned}$$

was wir umstellen können zu

$$\frac{d\varrho}{d\theta} = -\frac{1}{8}(1 - \cos(4\theta) + 8a'(\theta))\varrho^3 + \mathcal{O}(\varrho^4).$$

Nun wählen wir  $a'(\theta) = \frac{1}{8} \cos(4\theta)$  und erhalten damit

$$\frac{d\varrho}{d\theta} = -\frac{1}{8}\varrho^3 + \mathcal{O}(\varrho^4).$$

Der Restterm  $\mathcal{O}(\varrho^4)$  hängt in  $2\pi$ -periodischer Weise noch von  $\theta$  ab, aber auf jeden Fall ist dieser Restterm gleichmäßig beschränkt in  $\theta$ .

Dann erkennen wir:  $\varrho = 0$  ist asymptotisch stabil, also ist auch  $r = 0$  asymptotisch stabil für unser Ausgangssystem. Allerdings ist die Konvergenz zur Gleichgewichtslage sehr langsam.

Die Abbildung

$$\varrho(\theta_0) \mapsto \varrho(\theta_0 + 2\pi) := \Pi(\varrho(\theta_0)),$$

heißt POINCARÉ-ABBILDUNG. Bei der Verwirklichung dieser Abbildung folgt man einfach dem Fluß für eine „Periodendauer“. Hierbei behalten wir im Hinterkopf, daß die Lösung  $\varrho = \varrho(\theta)$  natürlich nicht periodisch in  $\theta$  ist, aber „fast“.

Für dieses Beispiel bekommt man dann

$$\Pi(\varrho_0) = \varrho_0 - \frac{2\pi}{8}\varrho_0^3 + \mathcal{O}(\varrho_0^4),$$

also ist der Radius  $\varrho$  bei einem Umlauf ein wenig geschrumpft.

Wir kehren zur allgemeinen Situation zurück:

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} x + f(x).$$

Dann gilt folgendes Ergebnis (ohne Beweis):

**Satz 1.43.** Sei  $f(0) = 0$  und  $\|f'(0)\| < 1$ . Weiterhin sei  $f$  analytisch. Dann tritt für den Gleichgewichtspunkt  $x = 0$  genau eine der folgenden Möglichkeiten ein:

- $x = 0$  ist instabil,
- $x = 0$  ist asymptotisch stabil,
- $x = 0$  ist ein Zentrum; das heißt, jede Lösung, die in einer Umgebung des Ursprungs verbleibt, ist periodisch.

Die Voraussetzung der Analytizität ist entscheidend: als Beispiel betrachten wir das System

$$\dot{r} = \begin{cases} -\exp\left(-\frac{1}{r^2}\right) \sin\left(\frac{1}{r}\right) & : r > 0, \\ 0 & : r = 0, \end{cases}$$

$$\dot{\theta} = 1.$$

Die Taylorreihe von  $\frac{dr}{d\theta}$  als Funktion von  $r$  besteht nur aus Nullsummanden, sie konvergiert zwar, aber nicht gegen  $-\exp(\dots)\sin(\dots)$ . Der Ursprung ist nicht asymptotisch stabil, sondern stabil, aber kein Zentrum. Um den Ursprung gibt es unendlich viele periodische Orbits mit dem Radius  $(k\pi)^{-1}$  für  $k \in \mathbb{N}_+$ . Wenn  $k$  ungerade ist, dann handelt es sich um einen stabilen Orbit. Und wenn  $k$  gerade ist, dann liegt ein instabiler periodischer Orbit vor.

## 1.16 Die Poincaré–Andronov–Hopf–Bifurkation

**Satz 1.44.** Wir betrachten im  $\mathbb{R}^2$  das System

$$\dot{x} = A(\lambda)x + F(\lambda, x)$$

mit  $A, F \in C^3$  und  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Die Matrix  $A$  habe Eigenwerte  $\alpha(\lambda) \pm i\beta(\lambda)$  für  $|\lambda| \ll 1$ , wobei

$$\alpha(0) = 0, \quad \beta(0) \neq 0, \quad \frac{d\alpha}{d\lambda}(0) \neq 0.$$

Weiterhin sei  $F(\lambda, 0) = 0$  und  $\frac{\partial F}{\partial x}(\lambda, 0) = 0$ .

Dann gilt: in jeder Umgebung  $U$  von  $x = 0 \in \mathbb{R}^2$  und für jedes  $\lambda_0 > 0$  gibt es ein  $\lambda^*$  mit  $|\lambda^*| < \lambda_0$ , sodaß die Differentialgleichung  $\dot{x} = A(\lambda^*)x + F(\lambda^*, x)$  einen nichttrivialen periodischen Orbit in  $U$  hat.

*Beweisskizze.* Zuerst transformieren wir die Koordinaten  $x$ , sodaß der Hauptteil des Systems zu einer reellen Jordanschen Normalform wird. Wir skalieren auch die Zeitvariable geeignet. Außerdem ist die Beziehung  $\alpha = \alpha(\lambda)$  invertierbar für kleine  $|\lambda|$ , sodaß wir  $\alpha$  für  $\lambda$  substituieren dürfen. Dann bekommen wir ein System der Gestalt

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= \lambda x_1 + x_2 + F_1(\lambda, x_1, x_2), \\ \dot{x}_2 &= -x_1 + \lambda x_2 + F_2(\lambda, x_1, x_2), \end{aligned}$$

mit neuen  $F_1$  und  $F_2$ , aber weiterhin  $F(\lambda, 0) = 0$  und  $\frac{\partial F}{\partial x}(\lambda, 0) = 0$ .

Wir wären fertig, wenn wir folgendes zeigen könnten: Es gibt Zahlen

$$0 < a_0 \ll 1, \quad 0 < \lambda_0 \ll 1, \quad 0 < \delta_0 \ll 1,$$

sodaß für jedes  $a$  mit  $0 \leq a < a_0$  es Werte  $\lambda^*(a)$  und  $T^*(a)$  sowie eine  $T^*(a)$ -periodische Funktion  $x^* = x^*(t; a)$  gibt mit folgenden Eigenschaften:

- die Werte  $\lambda^*$  und  $T^*$  sind Funktionen von  $a$  mit der Regularität  $C^1$ ,
- $\lambda^*(a=0) = 0$ ,  $T^*(a=0) = 2\pi$ ,  $\|x^*(t=0; a)\| = a$ ,

- $x^*$  ist eine Lösung, und sie hat für  $a \rightarrow 0$  die Asymptotik

$$\begin{aligned}x_1^*(t) &= a \cos t + \mathfrak{o}(a), \\x_2^*(t) &= -a \sin t + \mathfrak{o}(a),\end{aligned}$$

- für  $|\lambda| < \lambda_0$  und  $|T - 2\pi| < \delta_0$  ist jede  $T$ -periodische Lösung mit  $\|x(t=0)\| = a$  und  $\|x(t)\| < a_0$  identisch mit  $x^*(\cdot, a)$ , bis auf Phasenverschiebung.

Um dies zu zeigen, führen wir wie gehabt Polarkoordinaten ein:

$$x_1 = r \cos \theta, \quad x_2 = -r \sin \theta.$$

Dann bekommen wir eine Differentialgleichung

$$\frac{dr}{d\theta} = \lambda r + P(\lambda, r, \theta),$$

wobei  $P(\lambda, 0, \theta) = 0$  und  $\frac{\partial}{\partial r} P(\lambda, 0, \theta) = 0$ . Wir suchen Lösungen  $r = r(\lambda, \theta, a)$ , die  $2\pi$ -periodisch in  $\theta$  sind. Wenn wir  $\theta = 0$  setzen für  $t = 0$ , dann soll außerdem  $r(\lambda, 0, a) = a$  gelten. Die Periodizität wäre dann eine Konsequenz aus einer (noch zu erfüllenden) Bedingung  $r(\lambda, 2\pi, a) = a$ .

Mit Hilfe der Duhamel-Formel haben wir

$$r(\lambda, \theta, a) = e^{\lambda\theta} a + \int_{\varphi=0}^{\theta} e^{\lambda(\theta-\varphi)} P(\lambda, r(\lambda, \varphi, a), \varphi) d\varphi.$$

Wenn man berücksichtigt, daß  $P$  quadratisch klein im zweiten Argument ist, und wenn man  $a_0$  klein genug wählt, kann man eine Konstante  $C_0$  finden, sodaß  $|r(\lambda, \theta, a)| \leq C_0 a$  gilt, für  $0 \leq \theta \leq 2\pi$ . Weiterhin ist  $r(\lambda, 2\pi, a) = a$  äquivalent zu

$$(1 - e^{-2\pi\lambda}) a + \int_{\varphi=0}^{2\pi} e^{-\lambda\varphi} P(\lambda, r(\lambda, \varphi, a), \varphi) d\varphi = 0.$$

Dies ist eine Beziehung zwischen  $\lambda$  und  $a$ , in der noch die unbekannte Funktion  $r$  drinsteckt. Auf jeden Fall existiert diese Funktion  $r$  aber, auch wenn wir noch nicht gezeigt haben, daß wir die Periodizitätsrelation  $r(\lambda, 2\pi, a) = a$  hinbekommen.

Für  $a \neq 0$  definieren wir

$$h(a, \lambda) = 1 - e^{-2\pi\lambda} + \frac{1}{a} \int_{\varphi=0}^{2\pi} e^{-\lambda\varphi} P(\lambda, r(\lambda, \varphi, a), \varphi) d\varphi.$$

Die rechte Seite hat für  $a \rightarrow 0$  den Grenzwert  $1 - \exp(-2\pi\lambda)$ , denn  $P$  ist quadratisch klein im zweiten Argument und  $|r(\lambda, \varphi, a)| \leq C_0 a$ . Also können wir setzen

$$h(0, \lambda) = 1 - e^{-2\pi\lambda}.$$

Die Funktion  $h$  ist  $C^1$  in der Nähe von  $(0, 0)$ . Dann haben wir  $h(0, 0) = 0$  sowie  $\frac{\partial h}{\partial \lambda}(0, 0) = -2\pi \neq 0$ , also existiert nach dem Satz über implizite Funktionen eine Funktion  $\lambda^* = \lambda^*(a)$  mit  $\lambda^*(0) = 0$  und  $h(a, \lambda^*(a)) = 0$ .

Dann betrachtet man die Funktion  $r^*(\theta, a) = r(\lambda^*(a), \theta, a)$ .

Daraus ergeben sich dann die Funktionen  $x_1^*$  und  $x_2^*$ . □

**Bemerkung 1.45.** Weiterhin kann man zeigen: der periodische Orbit zum Parameter  $a$  ist ein asymptotisch stabiler Grenzyklus, wenn  $\frac{d\lambda^*(a)}{da} > 0$ , und es ist ein instabiler Grenzyklus, wenn  $\frac{d\lambda^*(a)}{da} < 0$ .

Als Beispiel betrachten wir den VAN DER POL-Oszillator:

$$\ddot{y} - (2\lambda - y^2)\dot{y} + y = 0, \quad |\lambda| \ll 1.$$

Wir transformieren mit  $x_1 = y$  und  $x_2 = \dot{y}$  die Gleichung auf das System

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= -x_1 + 2\lambda x_2 - x_1^2 x_2.\end{aligned}$$

Die Eigenwerte der Linearisierung sind  $\lambda \pm i\sqrt{1 - \lambda^2}$ , und wir haben also:

$\lambda < 0$ : der Ursprung ist asymptotisch stabil,

$\lambda = 0$ : der Ursprung ist asymptotisch stabil (siehe vorigen Abschnitt),

$\lambda > 0$ : der Ursprung ist instabil.

Laut dem Satz über die Poincaré–Andronov–Hopf–Bifurkation muß es für kleine  $|\lambda|$  periodische Orbits um 0 geben.

Wir setzen (mit Bezeichnungen, die nicht perfekt harmonisch zum Beweis des Satzes passen)

$$F_1(\lambda, x) = 0, \quad F_2(\lambda, x) = 2\lambda x_2 - x_1^2 x_2,$$

und haben dann für kleine  $|\lambda|$  die Abschätzung der Matrixnorm

$$\left\| \frac{\partial F}{\partial x}(\lambda, 0) \right\| < 1.$$

Nun setzen wir wie üblich  $x_1 = r \cos \theta$  und  $x_2 = -r \sin \theta$ . Dann erhalten wir auf üblichem Wegen die Differentialgleichung

$$\frac{dr}{d\theta} = \frac{2\lambda r \sin^2 \theta - r^2 \cos^2 \theta \sin^2 \theta}{1 + 2\lambda \sin \theta \cos \theta - r^2 \cos^3 \theta \sin \theta}.$$

Für den Nenner wenden wir die Formel  $(1 - z)^{-1} = 1 + z + z^2 + z^3 + \mathcal{O}(|z|^4)$  an, und wir bekommen nach einiger Rechnung die Beziehung

$$\frac{dr}{d\theta} = (\lambda - \lambda \cos(2\theta) + \mathcal{O}(\lambda^2)) r - \frac{1}{8} (1 - \cos(4\theta) + \mathcal{O}(\lambda)) r^3 + \mathcal{O}(r^4).$$

Die Vorfaktoren von  $r$  und  $r^3$  wünschen wir uns unabhängig von  $\theta$ . Deshalb transformieren wir

$$r = \varrho \exp\left(-\frac{\lambda}{2} \sin(2\theta)\right)$$

und erhalten dann damit

$$\begin{aligned}(\lambda - \lambda \cos(2\theta) + \mathcal{O}(\lambda^2)) r - \frac{1}{8} (1 - \cos(4\theta) + \mathcal{O}(\lambda)) r^3 + \mathcal{O}(r^4) \\ = \frac{dr}{d\theta} \\ = \frac{\partial r}{\partial \varrho} \cdot \frac{d\varrho}{d\theta} + \frac{\partial r}{\partial \theta} \\ = \exp\left(-\frac{\lambda}{2} \sin(2\theta)\right) \cdot \frac{d\varrho}{d\theta} + \varrho \exp\left(-\frac{\lambda}{2} \sin(2\theta)\right) \cdot \left(-\frac{\lambda}{2}\right) \cos(2\theta) \cdot 2, \\ \frac{d\varrho}{d\theta} = (\lambda + \mathcal{O}(\lambda^2)) \varrho - \frac{1}{8} (1 - \cos(4\theta) + \mathcal{O}(\lambda)) \varrho^3 + \mathcal{O}(\varrho^4).\end{aligned}$$

Anschließend ersetzen wir

$$\varrho \mapsto \varrho + a(\theta)\varrho^3, \quad \frac{da}{d\theta} = \frac{1}{8} \cos(4\theta),$$

und es folgt mit diesem neuen  $\varrho$

$$\frac{d\varrho}{d\theta} = (\lambda + \mathcal{O}(\lambda^2)) \varrho - \frac{1}{8} (1 + \mathcal{O}(\lambda)) \varrho^3 + \mathcal{O}(\varrho^4).$$

Die Poincaré-Abbildung bestimmt sich dann zu

$$\Pi(\varrho_0) = \varrho_0 + 2\pi \left( (\lambda + \mathcal{O}(\lambda^2))\varrho_0 - \frac{1}{8}(1 + \mathcal{O}(\lambda))\varrho_0^3 + \mathcal{O}(\varrho_0^4) \right).$$

Für einen periodischen Orbit ist  $\Pi(\varrho_0) = \varrho_0$ , also

$$\varrho_0 \left( (\lambda + \mathcal{O}(\lambda^2)) - \frac{1}{8}(1 + \mathcal{O}(\lambda))\varrho_0^2 + \mathcal{O}(\varrho_0^3) \right) = 0.$$

Die Lösung  $\varrho_0 = 0$  entspricht dem Fixpunkt im Ursprung und ist hier wenig relevant, ansonsten haben wir die Relationen

$$\lambda = \frac{1}{8}\varrho_0^2 + \mathcal{O}(\varrho_0^3), \quad \varrho_0 = \sqrt{8} \cdot \sqrt{\lambda} + \mathcal{O}(\lambda).$$

Dies ist die Beziehung zwischen dem Parameter  $\lambda$  und dem Orbitradius (gemessen in den transformierten Koordinaten  $\varrho$  anstatt  $r$ ).

Um zu entscheiden, ob dieser Orbit anziehend oder abstoßend ist, betrachten wir die Ableitung  $\frac{d\Pi}{d\varrho_0}$ , ausgewertet am Fixpunkt, also  $\varrho_0^2 = 8\lambda + \mathcal{O}(\lambda^2)$ :

$$\begin{aligned} \frac{d\Pi}{d\varrho_0} &= 1 + 2\pi \left( (\lambda + \mathcal{O}(\lambda^2)) - \frac{3}{8}(1 + \mathcal{O}(\lambda))\varrho_0^2 + \mathcal{O}(\varrho_0^3) \right) \\ &= 1 + 2\pi \left( \lambda - \frac{3}{8} \cdot 8\lambda + \mathcal{O}(\lambda^2) \right) \\ &= 1 - 4\pi\lambda + \mathcal{O}(\lambda^2). \end{aligned}$$

Also ist für kleine positive  $\lambda$  die Ableitung  $\frac{d\Pi_0}{d\varrho_0}$  kleiner als 1, also ist der Fixpunkt  $\varrho_0$  der Abbildung  $\varrho \mapsto \Pi(\varrho)$  anziehend, siehe auch Satz 1.11.

Das bedeutet: für kleine positive  $\lambda$  ist der Grenzzyklus asymptotisch stabil, und beim Durchlauf von negativen  $\lambda$  zu positiven  $\lambda$  verzweigt sich der asymptotisch stabile Punkt im Ursprung zu

- einem instabilen Fixpunkt im Ursprung,
- einem Grenzzyklus mit Radius etwa  $\sqrt{8\lambda}$ , der seinerseits benachbarte Trajektorien an sich heranzieht, also ein asymptotisch stabiler Grenzzyklus ist.

Als weiteres Beispiel betrachten wir

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= x_1 + \lambda x_2 - x_1^2. \end{aligned}$$

Für  $\lambda = 0$  erhalten wir genau das System (1.11). Allerdings interessieren wir uns diesmal nicht für den Ursprung des  $\mathbb{R}^2$ , sondern für den anderen stationären Punkt  $(1, 0)^\top$ . Die Jacobi-Matrix der rechten Seite ist

$$f'(x) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 - 2x_1 & \lambda \end{pmatrix}$$

mit den Eigenwerten

$$\lambda_{1,2} = \frac{\lambda}{2} \pm \sqrt{\frac{\lambda^2}{4} + (1 - 2x_1)}.$$

Für  $x_1 = 0$  und  $\lambda \approx 0$  haben wir also als Eigenwerte  $\approx \pm 1$ , während wir am Punkt  $x_1 = 1$  die Eigenwerte  $\frac{\lambda}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{4 - \lambda^2}$  erhalten. Und somit haben wir für den Punkt  $(1, 0)^\top$

$\lambda < 0$ : stabiler Strudel

$\lambda = 0$ : Zentrum

$\lambda > 0$ : instabiler Strudel, mit asymptotisch stabilem Grenzzyklus des Radius  $\mathcal{O}(\sqrt{\lambda})$  darum.

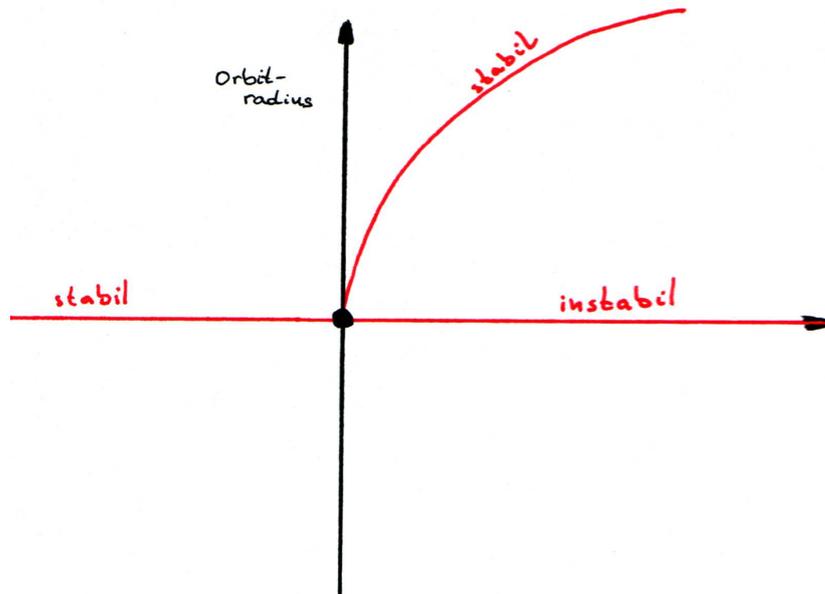


Abbildung 1.30: Poincaré-Andronov-Hopf-Bifurkation

## 1.17 Zentrumsmannigfaltigkeiten

Wir betrachten das System

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = f_1(x_1, x_2), \\ \dot{x}_2 = -x_2 + f_2(x_1, x_2) \end{cases} \quad (1.14)$$

mit  $f(0) = 0$  und  $f'(0) = 0$ .

**Definition 1.46.** Eine Kurve  $W_{\text{loc}}^c(0, \Omega)$  in einer Umgebung  $\Omega$  von  $0 \in \mathbb{R}^2$  heißt lokale Zentrumsmannigfaltigkeit, wenn

- $W_{\text{loc}}^c(0, \Omega)$  invariant unter dem Fluß  $\Phi$  ist (also: falls  $x_0 \in W_{\text{loc}}^c(0, \Omega)$ , dann auch  $\Phi_t(x_0) \in W_{\text{loc}}^c(0, \Omega)$ , solange  $\Phi_t(x_0) \in \Omega$ ,  $t \in \mathbb{R}$ ),
- $W_{\text{loc}}^c(0, \Omega)$  ist Graph einer Funktion, also

$$W_{\text{loc}}^c(0, \Omega) = \{(x_1, x_2) : x_2 = h(x_1), \quad (x_1, x_2) \in \Omega\},$$

wobei  $h(0) = 0$  und  $h'(0) = 0$ .

Als akademisches Beispiel betrachten wir das System

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= ax_1^3, \\ \dot{x}_2 &= -x_2. \end{aligned}$$

Die Linearisierung dazu lautet

$$\dot{y} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} y.$$

Die  $x_1$ -Achse enthält die Eigenvektoren zum Eigenwert 0, und die  $x_2$ -Achse enthält die Eigenvektoren zum Eigenwert  $-1$ . Wir können hier z.B.  $h = h(x_1) \equiv 0$  wählen und somit

$$W_{\text{loc}}^c(0, \Omega) = \{(x_1, x_2) \in \Omega : x_2 = 0\}.$$

Jeder andere Orbit strebt zu  $W_{\text{loc}}^c(0, \Omega)$  exponentiell schnell, und der Fluß des  $x_1 - x_2$ -Systems sieht „im Wesentlichen“ genauso aus wie der Fluß zu  $\dot{x}_1 = ax_1^3$  innerhalb von  $W_{\text{loc}}^c(0, \Omega)$ . Der Fluß verläßt  $W_{\text{loc}}^c(0, \Omega)$  nicht, bzw. er nähert sich extrem schnell an die Zentrumsmannigfaltigkeit an. Also reicht es zu verstehen, wie der Fluß sich innerhalb  $W_{\text{loc}}^c(0, \Omega)$  verhält. Der Nutzen dieses Begriffs besteht also in einer Reduktion der Dimension.

**Bemerkung 1.47.** *Ein entscheidender Unterschied der Zentrumsmannigfaltigkeiten zu den stabilen bzw. instabilen Mannigfaltigkeiten besteht darin, daß die Zentrumsmannigfaltigkeiten nicht eindeutig sind. Sei im obigen Beispiel  $a < 0$ . Dann werden weitere Zentrumsmannigfaltigkeiten gegeben durch*

$$h(x_1) = \begin{cases} c_1 \exp\left(\frac{1}{2ax_1^2}\right) & : x_1 < 0, \\ 0 & : x_1 = 0, \\ c_2 \exp\left(\frac{1}{2ax_1^2}\right) & : x_1 > 0, \end{cases}$$

wobei  $c_1$  und  $c_2$  aus  $\mathbb{R}$  beliebig gewählt werden können. Zur Verifikation überlegen wir uns, daß der Orbit tangential an  $W_{\text{loc}}^c$  verlaufen muß. Sei nun also  $x_2(t) = h(x_1(t))$ . Ableitung nach der Zeit ergibt  $\dot{x}_2(t) = h'(x_1(t)) \cdot \dot{x}_1(t)$ . Und die Funktion  $h$  wurde gerade so gewählt, daß dies gilt.

Für die Zentrumsmannigfaltigkeiten gilt folgender Hauptsatz:

**Satz 1.48.** *Für die Funktion  $f$  aus (1.14) sei  $f \in C^k(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$ . Dann existiert eine Umgebung  $\Omega$  von  $0 \in \mathbb{R}^2$  und darin eine lokale Zentrumsmannigfaltigkeit  $W_{\text{loc}}^c(0, \Omega)$  mit folgenden Eigenschaften:*

- die beschreibende Funktion  $h$  erfüllt  $h \in C^k$ ,
- es gibt positive  $\alpha, \beta$  sodaß gilt: falls  $x_0 \in \Omega$ , dann ist

$$|x_2(t) - h(x_1(t))| \leq \alpha e^{-\beta t} |x_2(0) - h(x_1(0))|,$$

vorausgesetzt, daß  $(x_1(t), x_2(t))$  in  $\Omega$  verbleibt.

*Beweisanmerkungen.* Der Beweis ist aufwendig, und eine zentrale Schwierigkeit besteht darin, daß diese Funktion  $h$  nicht eindeutig bestimmt werden kann. Allerdings haben sämtliche Funktionen  $h$  mit den gesuchten Eigenschaften dieselbe Taylor-Entwicklung im Ursprung, und sie unterscheiden sich höchstens durch exponentiell kleine Terme.  $\square$

Die heuristische Vorstellung ist, daß der „langsame Fluß“ in  $W_{\text{loc}}^c$  durch die Variable  $x_1$  parametrisiert werden kann, und daß der Fluß transversal zu  $W_{\text{loc}}^c$  „schneller“ ist. Dies wird gerade durch die Ungleichung im Satz ausgedrückt. Man beachte, daß der Satz nichts aussagt, was passiert, nachdem die Lösungskurve  $(x(t))$  die Umgebung  $\Omega$  verlassen haben sollte.

## 1.18 Der Satz von POINCARÉ–BENDIXSON

Für ein System der Form  $\dot{x} = f(x)$  fragen wir uns, wie  $\omega(x_0)$  aussehen kann. Es stellt sich dabei heraus, daß eine vergleichsweise schöne Antwort möglich ist, wenn man sich auf den Fall  $n = 2$  beschränkt.

**Satz 1.49 (Poincaré–Bendixson).** *Sei  $f \in C^2(\mathbb{R}^2; \mathbb{R}^2)$ , und sei der Vorwärtsorbit  $\gamma_+(x_0)$  beschränkt. Dann tritt genau einer der beiden folgenden Fälle ein:*

1.  $\omega(x_0)$  ist ein periodischer Orbit,
2. für jedes  $y \in \omega(x_0)$  gilt: sowohl  $\alpha(y)$  als auch  $\omega(y)$  bestehen nur aus Gleichgewichtspunkten.

*Beweis.* Aus Satz 1.31 wissen wir:  $\omega(x_0)$  ist kompakt, nichtleer, invariant und zusammenhängend. Weiterhin haben wir

$$\omega(x_0) = \bigcap_{t \geq 0} \overline{\gamma_+(\Phi_t(x_0))}, \quad \omega(y) = \bigcap_{t \geq 0} \overline{\gamma_+(\Phi_t(y))}.$$

Nun ist  $\omega(x_0)$  invariant. Wenn also  $y \in \omega(x_0)$ , dann ist auch  $\omega(y) \subset \omega(x_0)$  und  $\alpha(y) \subset \omega(x_0)$ .

Die bisherigen Überlegungen sind gültig in beliebigen Dimensionen. Unsere weitere Strategie ist wie folgt: sei  $n = 2$  und der obige Punkt 2 verletzt. Dann gilt Punkt 1.

Wir nehmen also an, daß ein  $y_0 \in \omega(x_0)$  existiert, sodaß  $\omega(y_0)$  nicht nur aus Gleichgewichten besteht (der Fall von  $\alpha(y_0)$  läuft analog).

Also existiert ein  $z_0 \in \omega(y_0)$ , das kein Gleichgewichtspunkt ist. Wegen  $\omega(y_0) \subset \omega(x_0)$  ist also  $z_0 \in \omega(x_0)$ .

Wir verschieben das Koordinatensystem, sodaß  $z_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$  wird. Dann haben wir  $f(z_0) \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ , denn  $z_0$  ist kein Gleichgewicht. Nach dem Satz über die Begradigung<sup>6</sup> können wir die Koordinaten so transformieren, daß in einer Umgebung

$$V = (-\delta, \delta) \times (-\delta, \delta) \subset \mathbb{R}^2$$

des Punktes  $z_0$  gilt:  $f(x) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ . Wir betrachten weiterhin die Schnittlinie mit der  $x_2$ -Achse

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ x_2 \end{pmatrix} : -\delta < x_2 < \delta \right\}.$$

Weil  $z_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$  zu  $\omega(x_0)$  gehört, muß der Orbit  $\gamma_+(x_0)$  die Umgebung  $V$  von  $z_0$  unendlich oft durchqueren (vgl. die Definition der  $\omega$ -Limesmenge). Und weil nun das Vektorfeld in ganz  $V$  parallel zur  $x_1$ -Achse zeigt, muß der Orbit  $\gamma_+(x_0)$  die Schnittlinie  $S$  unendlich oft schneiden. Wir betrachten nun die Folge der zeitlich aufeinanderfolgenden Schnittpunkte:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ x_2(t_1) \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ x_2(t_2) \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ x_2(t_3) \end{pmatrix}, \dots$$

wobei  $0 < t_1 < t_2 < t_3 \dots$  sowie  $\lim_{k \rightarrow \infty} t_k = +\infty$ .

Im Folgenden beweisen wir: die Folge  $(x_2(t_k))_{k \rightarrow \infty}$  ist streng monoton und beschränkt. Dazu betrachten wir  $x_2(t_1)$  und  $x_2(t_2)$ .

Klar ist: wenn  $x_2(t_1) = x_2(t_2)$ , dann liegt ein periodischer Orbit  $\gamma_+(x_0)$  vor, und der Beweis ist beendet. Sei also ab jetzt  $x_2(t_1) \neq x_2(t_2)$ .

Der Fall  $x_2(t_2) < 0 < x_2(t_1)$  ist nicht möglich: denn die Linien

$$\{x = x(t) : t_1 \leq t \leq t_2\} \quad \text{und} \quad \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ \xi_2 \end{pmatrix} : x_2(t_2) \leq \xi_2 \leq x_2(t_1) \right\}$$

begrenzen entweder ein negativ invariantes Gebiet (siehe Abbildung 1.31), also eines, aus dem das

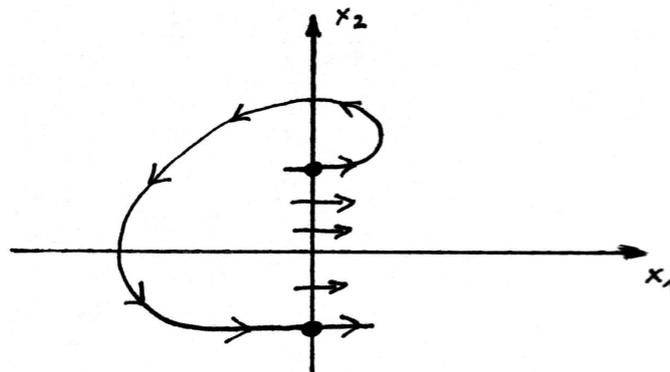


Abbildung 1.31:

<sup>6</sup>Satz über die Begradigung: Sei  $U \subset \mathbb{R}^n$  offen und für ein  $r \in \mathbb{N}_+$  sei  $f \in C^r(U, \mathbb{R}^n)$ . Sei weiterhin  $f(x_0) \neq 0$  für ein  $x_0 \in U$ . Dann existiert ein  $C^r$ -Diffeomorphismus  $\Psi: V \rightarrow W$  einer Umgebung  $V$  des Punktes  $x_0$  auf eine Menge  $W \subset \mathbb{R}^n$ , sodaß die Transformation  $y = \Psi(x)$  das System  $\dot{x} = f(x)$  transformiert auf  $\dot{y} = \tilde{f}(y)$ , wobei  $\tilde{f}(\Psi(x)) = (1, 0, \dots, 0)^T$  ist für alle  $x \in V$ .

Vektorfeld immer nur herausfließt (oder tangential zum Rand verläuft), aber niemals hinein<sup>7</sup>. Wir können dieses negativ invariante Gebiet sogar noch etwas vergrößern, indem wir die Menge  $(0, \delta) \times (x_2(t_2), x_2(t_1))$  anfügen. Dann bekommen wir ein negativ invariantes Gebiet, das den Ursprung  $z_0$  als inneren Punkt enthält. Das bedeutet, daß der Orbit ab dem Zeitpunkt  $t_2$  nie wieder in diese negativ invariante Menge eintritt, also kann  $z_0$  nicht zu  $\omega(x_0)$  gehören, was ein Widerspruch ist. Oder diese Linien begrenzen ein

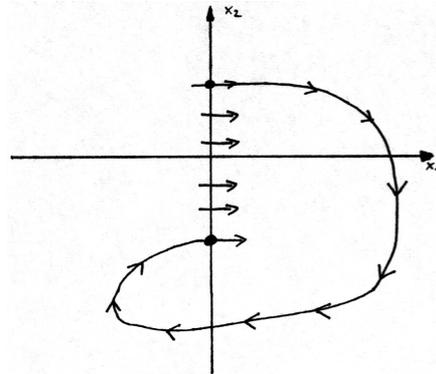


Abbildung 1.32:

positiv invariantes Gebiet (siehe Abbildung 1.32), das wir sogar noch etwas verkleinern können, indem wir die Menge  $(0, \delta) \times (x_2(t_2), x_2(t_1))$  entfernen. Dann bekommen wir ein positiv invariantes Gebiet, das den Ursprung  $z_0$  nicht mehr enthält (auch nicht auf dem Rand). Und wieder könnte  $z_0$  nicht zu  $\omega(x_0)$  gehören, was ein Widerspruch ist.

Also ist die Variante  $x_2(t_2) < 0 < x_2(t_1)$  unmöglich.

Die Variante  $x_2(t_1) < 0 < x_2(t_2)$  widerlegt man genauso.

Also haben  $x_2(t_1)$  und  $x_2(t_2)$  dasselbe Vorzeichen.

Die Fälle  $0 < |x_2(t_1)| < |x_2(t_2)|$  widerlegt man analog.

Damit gilt eine der beiden folgenden Aussagen:

- Es ist  $x_2(t_1) > 0$  und  $x_2(t_1) > x_2(t_2) > 0$ .
- Es ist  $x_2(t_1) < 0$  und  $x_2(t_1) < x_2(t_2) < 0$ .

Das läßt sich sofort übertragen auf den Vergleich von  $x_2(t_k)$  und  $x_2(t_{k+1})$ . Wir bekommen auf jeden Fall, daß die Folge  $(x_2(t_k))_{k \rightarrow \infty}$  streng monoton und beschränkt ist. Also hat sie einen Grenzwert. Dieser ist  $\geq 0$  im ersten Fall und  $\leq 0$  im zweiten Fall. Wir sehen sogar, daß dieser Grenzwert gleich 0 sein muß, weil sonst  $z_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$  nicht zu  $\omega(x_0)$  gehören kann.

Damit gilt:

$$\omega(x_0) \cap S = \{z_0\}.$$

Jetzt argumentieren wir in zwei Schritten:

$\gamma(x_0)$  **ist periodisch**: denn es ist  $z_0 \in \omega(y_0)$ , also durchquert  $\gamma_+(y_0)$  das Rechteck  $V$  unendlich oft, also schneidet  $\gamma_+(y_0)$  die Linie  $S$  unendlich oft. Aber andererseits ist  $\gamma_+(y_0) \subset \omega(x_0)$ , und somit gilt

$$\gamma_+(y_0) \cap S \subset \omega(x_0) \cap S = \{z_0\}.$$

Das ergibt zwei Möglichkeiten: entweder  $\gamma_+(y_0) \cap S = \emptyset$  (was aber unmöglich ist, denn die Linie  $S$  soll vom Orbit  $\gamma_+(y_0)$  unendlich oft geschnitten werden), oder  $\gamma_+(y_0) \cap S = \{z_0\}$ . Also liegt  $z_0$  auf dem Orbit  $\gamma_+(y_0)$ . Wenn man die obigen Überlegungen mit dem Jordanschen Kurvensatz nochmal anwendet, stellt man fest, daß der Orbit  $\gamma_+(z_0)$  wieder zu  $z_0$  zurückkehren muß. Also ist  $\gamma_+(y_0)$  ein periodischer Orbit.

<sup>7</sup>An dieser Stelle benutzen wir den Jordanschen Kurvensatz, der besagt, daß eine Jordankurve die Ebene in ein beschränktes Innengebiet und ein unbeschränktes Außengebiet zerlegt. Und diesen Satz gibt es nur im  $\mathbb{R}^2$

**Es ist  $\gamma(y_0) = \omega(x_0)$ :** Wir haben schon gezeigt, daß  $\gamma(y_0) = \omega(y_0) \subset \omega(x_0)$ . Also nehmen wir jetzt an, daß  $\omega(x_0) \setminus \gamma(y_0) \neq \emptyset$ . Wir betrachten schlauchförmige Umgebungen von  $\gamma(y_0)$ , siehe Abbildung 1.33. **Angenommen**, es gäbe eine solche schlauchförmige Umgebung von  $\gamma(y_0)$ , die kei-

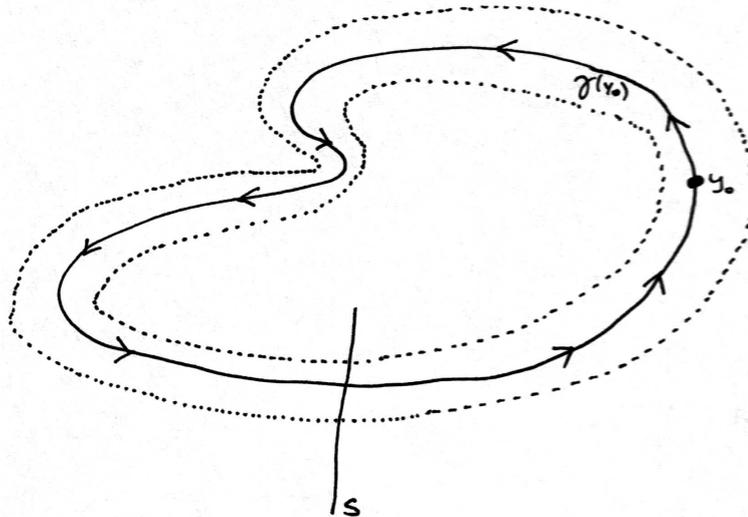


Abbildung 1.33:

nen Punkt aus  $\omega(x_0) \setminus \gamma(y_0)$  enthält. Weil  $\gamma(y_0)$  in  $d\omega(x_0)$  enthalten ist, und weil  $\omega(x_0)$  zusammenhängend ist, kann außerhalb dieser schlauchförmigen Umgebung auch kein Punkt von  $\omega(x_0) \setminus \gamma(y_0)$  liegen. Dann wäre  $\omega(x_0) \setminus \gamma(y_0) = \emptyset$ , entgegen der Annahme.

**Also** gilt: jede noch so schmale schlauchförmige Umgebung von  $\gamma(y_0)$  enthält mindestens einen Punkt aus  $\omega(x_0) \setminus \gamma(y_0)$ .

Wir wählen einen Punkt  $y^*$  auf  $\gamma(y_0)$ . Wenn wir ab diesem Punkt dem Fluß folgen, dann kommen wir irgendwann in  $z_0$  an. Es gibt also ein  $T > 0$  mit  $z_0 = \Phi_T(y^*)$ . Offensichtlich hängt  $T$  von  $y^*$  ab. Nun ist  $\Phi_T$  eine stetige Abbildung des  $\mathbb{R}^2$  auf sich, sogar ein Diffeomorphismus. Zu jeder Umgebung von  $z_0$  gibt es also eine Umgebung von  $y^*$ , die durch  $\Phi_T$  in die erstgenannte abgebildet wird. Insbesondere finden wir eine Kreisscheibe  $U_\varepsilon(y^*)$  mit Radius  $\varepsilon > 0$  und Mittelpunkt  $y_0$ , die durch  $\Phi_T$  in das Innere von  $V$  abgebildet wird. Womöglich hängt der Radius  $\varepsilon$  von  $y^*$  ab.

Dies können wir für jeden Punkt  $y^*$  auf  $\gamma(y_0)$  wiederholen. Auf diesem Wege wird der ganze Orbit  $\gamma(y_0)$  überdeckt durch unendlich viele offene Kreisscheiben. Weil  $\gamma(y_0)$  aber eine kompakte Menge des  $\mathbb{R}^2$  ist, genügen für diese Überdeckung von  $\gamma(y_0)$  bereits endlich viele Kreisscheiben. Von diesen endlich vielen Kreisscheiben gibt es eine, deren Radius der kleinste ist.

Also finden wir eine schlauchförmige Umgebung von  $\gamma(y_0)$ , die ebenfalls überdeckt wird von der Vereinigung dieser endlich vielen Kreisscheiben. Nach unserer Annahme enthält diese schlauchförmige Umgebung einen Punkt aus  $\omega(x_0) \setminus \gamma(y_0)$ . Diesen Punkt nennen wir  $\tilde{y}$ . Wenn wir ab  $\tilde{y}$  dem Fluß folgen, dann landen wir (gemäß unserer Konstruktion) irgendwann in der Menge  $V$ . Nun ist aber innerhalb des Rechtecks  $V$  das Vektorfeld  $f$  begradigt. Also schneidet der Orbit ab  $\tilde{y}$  die Linie  $S$  in mindestens einem Punkt. Dieser kann nicht  $z_0$  sein. Nun ist jedoch  $\tilde{y} \in \omega(x_0)$ , und wir wissen, daß  $\omega(x_0) \cap S = \{z_0\}$ . Das kann nicht sein.

Also ist die Annahme  $\omega(x_0) \setminus \gamma(y_0) \neq \emptyset$  falsch.

Somit ist  $\gamma(y_0) = \omega(x_0)$ .

□

Mögliche  $\omega$ -Limesmengen finden sich rot in Abbildung 1.34. Gleichgewichte sind jeweils rote Knoten.

Wir bemerken, daß ein Analogon des Satzes von Poincaré–Bendixson für den  $\mathbb{R}^3$  nicht existieren kann,

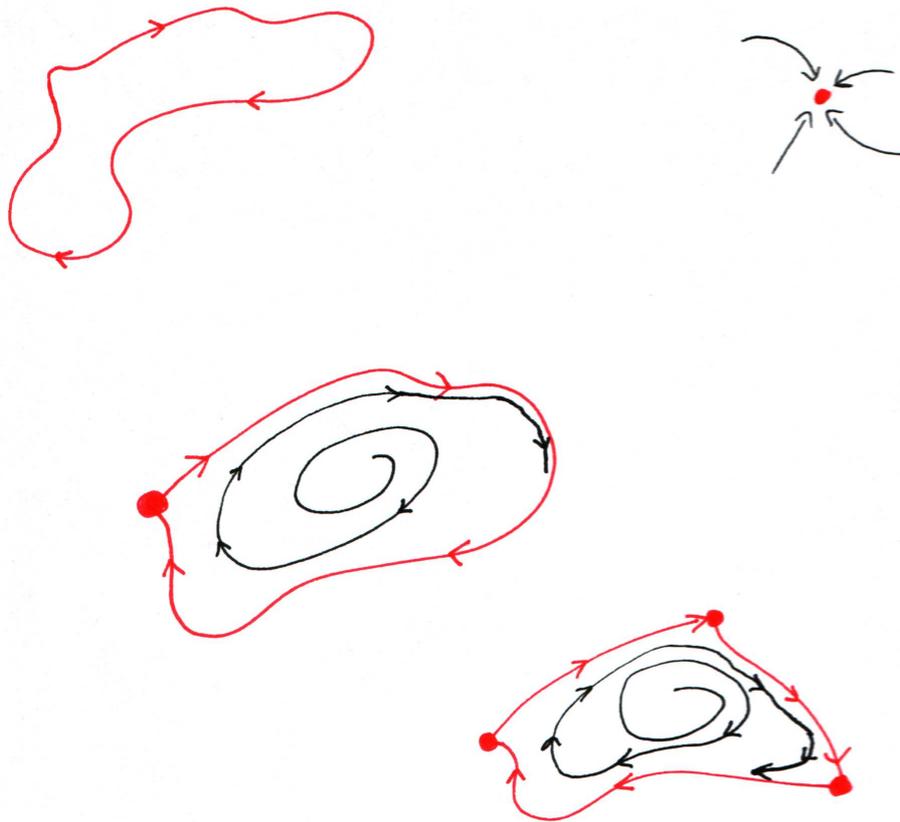


Abbildung 1.34:

wie das Lorenz-Modell belegt:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \sigma(y - x), \\ \dot{y} &= \rho x - y - xz, \\ \dot{z} &= -\beta z + xy\end{aligned}$$

mit  $\sigma = 10$ ,  $\rho = 28$  und  $\beta = 8/3$ . Dann sind die Lösungskurven beschränkt, wenn der Anfangspunkt in der Nähe des Ursprungs gewählt ist. Der Orbit liegt dann in der Nähe einer zweiblättrigen Fläche, aber es ist nicht vorhersagbar, wenn der Orbit auf dem einen bzw. anderen Blatt der Fläche sein wird. Dieses Verhalten hängt sehr empfindlich von den Anfangsbedingungen ab. Wir haben damit: der Vorwärtsorbit  $\gamma_+(x_0)$  ist beschränkt, aber die  $\omega$ -Limesmenge von  $x_0$  ist kein periodischer Orbit, und die Relation „ $y \in \omega(x_0) \implies \omega(y_0)$  ist Fixpunkt“ gilt auch nicht.

Als Anwendung betrachten wir den Brüsselator, der 1968 von Prigogine und Lefever (siehe auch [6]) vorgeschlagen wurde als vereinfachtes Modell zur Belousov-Zhabotinskii-Reaktion:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= a - x - bx + x^2y, \\ \dot{y} &= bx - x^2y,\end{aligned}$$

wobei  $a$  und  $b$  positive Konstanten sind. Die Größen  $x$  und  $y$  bezeichnen Konzentrationen von chemischen Stoffen, sollten also sinnvollerweise niemals negativ werden.

Zur Bestimmung von Gleichgewichtslagen addieren wir die Gleichungen  $\dot{x} = 0$  und  $\dot{y} = 0$ , was uns führt auf  $a - x = 0$ , also  $x = a$ . Mit der Gleichung  $bx - x^2y = 0$  bekommen wir dann  $y = \frac{b}{a}$ . Wir linearisieren und kommen auf

$$f' = \begin{pmatrix} -1 - b - 2xy & x^2 \\ b - 2xy & -x^2 \end{pmatrix}, \quad f'(a, b/a) = \begin{pmatrix} b - 1 & a^2 \\ -b & -a^2 \end{pmatrix}.$$

Die Spur ist  $b - a^2 - 1$ , und die Determinante ist  $\det f' = a^2 > 0$ . Wenn wir

$$b > a^2 + 1$$

voraussetzen, dann hat die Matrix  $f'$  zwei Eigenwerte in der rechten Halbebene. Damit ist der Gleichgewichtspunkt  $(a, b/a)$  instabil.

**Lemma 1.50.** *Wenn  $b > a^2 + 1$ , dann besitzt dieses System einen periodischen Orbit im ersten Quadranten  $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0, y > 0\}$ .*

*Beweis.* Wir bestimmen ein Gebiet  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  durch folgende Ungleichungen:

$$x > 0, \quad y > 0, \quad x + y < c_1, \quad y - x < c_2.$$

Wenn die Parameter  $c_1$  und  $c_2$  genügend groß und positiv gewählt werden, dann kann man für jede der 4 Begrenzungskanten nachweisen, daß das Vektorfeld  $f$  dort in  $\Omega$  hineinfließt. Also ist  $\Omega$  positiv invariant.

Nun wählen wir einen beliebigen Punkt  $p \in \Omega$ . Dann verläuft  $\gamma_+(p)$  vollständig in  $\Omega$ , ist also beschränkt. Wenn  $\omega(p)$  nicht periodisch wäre, dann müßte nach dem Satz von Poincaré–Bendixson  $\omega(q)$  nur aus Gleichgewichtspunkten von  $f$  bestehen, für jeden Punkt  $q \in \omega(p)$ . Nun hat  $f$  aber nur den einen Gleichgewichtspunkt  $(a, b/a)$ , und dieser ist jedoch instabil, also abstoßend. Also muß  $\omega(p)$  periodisch sein.  $\square$

Das bedeutet: der Orbit ab **jedem** Startpunkt  $p \in \Omega$  strebt zu demselben periodischen Grenzyklus.

# Kapitel 2

## Dynamische Systeme mit unendlichdimensionalem Zustandsraum

### 2.1 Unterschiede zum endlichdimensionalen Fall

Ab jetzt sei  $X$  ein Banachraum mit Norm  $\|\cdot\|_X$  und  $\dim X = \infty$ . Wir betrachten eine Funktion

$$\begin{aligned} u: \mathbb{R} &\rightarrow X, \\ u: t &\mapsto u(t), \end{aligned}$$

die Lösung einer Differentialgleichung

$$\dot{u}(t) = f(u(t))$$

sein soll. Hierbei ist  $f: X \rightarrow X$  eine Abbildung, die eventuell nichtlinear sein kann. Es hat sich herausgestellt, daß häufig diese Abbildung nicht sinnvoll auf dem ganzen Raum  $X$  definiert werden kann, sondern nur auf einem Teil von  $X$ . Wir haben also

$$f: D(f) \rightarrow X.$$

Über die Stetigkeit von  $f$  wird zunächst nichts behauptet.

Die Ableitung  $\dot{u}(t)$  ist zu verstehen als

$$\dot{u}(t) := \lim_{\mathbb{R} \ni h \rightarrow 0} \frac{1}{h} (u(t+h) - u(t)),$$

mit Konvergenz in der Norm  $\|\cdot\|_X$ . Wenn diese Ableitung in einem Punkt  $t_0 \in \mathbb{R}$  existiert, dann ist  $u$  im Punkt  $t_0$  stetig.

Als Beispiel betrachten wir  $u = u(t, x)$  mit  $t \in \mathbb{R}$ ,  $x \in \mathbb{R}$ . Also ist  $u(t)$  eine Funktion, die noch von einer Variablen  $x$  abhängt. Die Funktion  $u$  soll Lösung sein zur Transportgleichung

$$\begin{cases} \partial_t u(t, x) = c \partial_x u(t, x), & (t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}, \\ u(0, x) = u_0(x), & x \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

wobei  $c \in \mathbb{R}$  eine gegebene Konstante ist. Damit haben wir also  $f(u) = c \partial_x u$ . Wir erwarten, daß unter geeigneten Voraussetzungen an  $u_0$  (z.B. reicht es, zu verlangen, daß  $u_0$  stetig differenzierbar ist) die eindeutig bestimmte Lösung gegeben wird durch

$$u(t, x) = u_0(x + ct), \quad (t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}.$$

Die Frage ist nun, was wir als Zustandsraum  $X$  wählen wollen? Wir beabsichtigen, auch Funktionen  $u$  zuzulassen, die für  $|x| \rightarrow \infty$  nicht abklingen, was die meisten Lebesgue- und Sobolevräume ausschließt.

Ein erster Versuch der Wahl von  $X$  ist

$$X = C_b^0(\mathbb{R}) := \left\{ w = w(x) : w \text{ stetig auf } \mathbb{R}, \sup_{x \in \mathbb{R}} |w(x)| < \infty \right\}$$

mit Norm  $\|w\|_X = \sup_{x \in \mathbb{R}} |w(x)|$ . Der Subskript „b“ steht für „beschränkt“.

Der Definitionsbereich von  $f$  wäre dann

$$D(f) = C_b^1(\mathbb{R}) := \left\{ w = w(x) : w \text{ stetig differenzierbar auf } \mathbb{R}, \sup_{x \in \mathbb{R}} (|w(x)| + |w'(x)|) < \infty \right\}.$$

Nun stellen wir aber fest, daß dies eine schlechte Wahl für  $X$  ist. Denn für  $u_0 = u_0(x) = \sin(x^2)$  haben wir zwar  $u_0 \in X$ , aber andererseits ist

$$\|u(t) - u_0\|_X = \sup_{x \in \mathbb{R}} |u(t, x) - u_0(x)| = \sup_{x \in \mathbb{R}} |u_0(x + ct) - u_0(x)| = 2,$$

und zwar egal, wie nahe  $t$  an 0 gewählt wird. Allgemeiner gilt: egal wie nahe zwei Zeiten  $t_1$  und  $t_2$  beieinander gewählt werden, stets ist  $\|u(t_1) - u(t_2)\|_X = 2$ . Der Orbit ist in diesem Raum  $X$  also komplett unzusammenhängend.

Es gibt mehrere Auswege aus dieser verfahrenen Situation. Wir könnten verlangen, daß  $u_0$  nicht nur zu  $X$  gehört, sondern zu  $D(f)$ . Das wollen wir hier nicht tun, weil  $D(f)$  „zu weit“ vom Raum  $X$  entfernt liegt, der uns eigentlich interessiert.

Stattdessen modifizieren wir die Wahl von  $X$  ein klein wenig:

$$X = C_{b,glm}^0(\mathbb{R}) := \left\{ w = w(x) : w \text{ gleichmäßig stetig auf } \mathbb{R}, \sup_{x \in \mathbb{R}} |w(x)| < \infty \right\}$$

mit Norm  $\|w\|_X = \sup_{x \in \mathbb{R}} |w(x)|$ .

Und diese Wahl kommt unseren Wünschen deutlich näher, denn es gilt:

**Lemma 2.1.** *Sei  $u_0 \in X = C_{b,glm}^0$  und sei  $u = u(t, x) := u_0(x + ct)$ . Dann ist die Abbildung  $t \mapsto u(t, \cdot)$  gleichmäßig stetig als Abbildung von  $\mathbb{R}$  nach  $X$ .*

*Beweis.* Wir wollen zeigen: zu jedem  $\varepsilon > 0$  existiert ein  $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ , sodaß gilt: wenn  $|t_1 - t_2| < \delta$ , dann ist  $\|u(t_1) - u(t_2)\|_X < \varepsilon$ . Nun ist aber

$$\|u(t_1) - u(t_2)\|_X = \sup_{x \in \mathbb{R}} |u_0(x + ct_1) - u_0(x + ct_2)| = \sup_{y \in \mathbb{R}} |u_0(y + c(t_1 - t_2)) - u_0(y)|,$$

und hier brauchen wir nur noch die Definition der gleichmäßigen Stetigkeit auf  $u_0$  anzuwenden. □

Diejenige Abbildung, die  $u_0(\cdot)$  auf  $u(t, \cdot)$  abbildet, nennen wir  $T(t)$ :

$$(T(t)u_0)(x) := u_0(x + ct), \quad t \geq 0.$$

Insgesamt haben wir dann  $T(t) \circ T(s) = T(t + s)$  und  $T(0) = \text{id}_X$  (die identische Abbildung). Und außerdem gilt  $\lim_{t \rightarrow +0} T(t)u_0 = u_0$  mit Konvergenz im Sinne der Norm  $\|\cdot\|_X$ .

Dieses Konzept brauchen wir noch öfter:

**Definition 2.2 ( $C_0$ -Halbgruppe).** *Eine Familie  $(T(t))_{t \geq 0}$  heißt  $C_0$ -Halbgruppe auf einem Banachraum  $X$ , wenn folgendes gilt:*

- für jedes  $t \geq 0$  ist  $T(t)$  ein lineare und stetige Abbildung von  $X$  nach  $X$ ,
- es ist  $T(t) \circ T(s) = T(t + s)$  für alle  $t, s \geq 0$ ,

- es ist  $T(0) = \text{id}_X$ ,
- die Familie ist stark stetig im Sinne von  $\lim_{t \rightarrow +0} T(t)x = x$  für jedes  $x \in X$ , mit Konvergenz gemessen in  $\|\cdot\|_X$ .

Eine solche Halbgruppe heißt auch stark stetige Halbgruppe.

In unserem konkreten Beispiel könnten wir auch negative  $t$  zulassen und die genannten Relationen würden immer noch gelten. Dann würden wir sogar von einer  $C_0$ -Gruppe sprechen, nicht nur von einer Halbgruppe.

Ein typisches Beispiel einer Halbgruppe wird gegeben durch  $T(t) = \exp(At)$ , wobei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine Matrix ist. Dann ist  $T$  genau die Fundamentallösung des gewöhnlichen Differentialgleichungssystems  $\frac{d}{dt} - A$ .

Diesen Gedanken wollen wir jetzt auf den unendlichdimensionalen Fall verallgemeinern.

**Definition 2.3.** Sei  $(T(t))_{t \geq 0}$  eine stark stetige Halbgruppe auf dem Banachraum  $X$ . Ein Operator  $A$ , definiert durch

$$Au := \lim_{t \rightarrow +0} \frac{T(t)u - u}{t},$$

(mit Konvergenz gemessen in  $\|\cdot\|_X$ ) heißt infinitesimaler Erzeuger (bzw. Generator) von  $T$ . Der Definitionsbereich  $D(A)$  besteht aus allen  $u \in X$ , für die der obige Limes existiert.

Im Fall mit  $T(t)u_0 = u_0(\cdot + ct)$  bekommen wir gerade

$$(Au_0)(x) = \lim_{t \rightarrow +0} \frac{u_0(x + ct) - u_0(x)}{t} = c \partial_x u_0(x),$$

falls der Limes existiert.

Wir bestimmen jetzt  $D(A)$ . Um uninteressante Dinge auszuschließen, verbieten wir jetzt den Fall  $c = 0$ . Zunächst muß eine Funktion  $u_0 \in D(A)$  differenzierbar sein im klassischen Sinne, also  $u_0 \in C^1(\mathbb{R})$ . Tatsächlich gilt sogar:

$$D(A) = C_{b,glm}^1(\mathbb{R}) = \left\{ w : w \text{ stetig diffbar auf } \mathbb{R}, \text{ und } w' \text{ glm. stetig, } \sup_{x \in \mathbb{R}} (|w(x)| + |w'(x)|) < \infty \right\}$$

mit Norm  $\|w\|_{D(A)} = \sup_{x \in \mathbb{R}} (|w(x)| + |w'(x)|)$ .

Denn: sei  $u_0 \in D(A)$ . Dann ist  $Au_0$  der Grenzwert von Brüchen  $\frac{1}{t}(T(t)u_0 - u_0)$  mit Konvergenz in  $X$ . Nun liegt jeder Bruch in  $X$ , und  $X$  ist ein Banachraum, also muß der Limes  $Au_0$  auch in  $X$  liegen, also ist  $\partial_x u_0$  gleichmäßig stetig auf  $\mathbb{R}$  und auf  $\mathbb{R}$  beschränkt.

Wir haben noch nicht gezeigt, daß  $X$  ein Banachraum ist. Zunächst ist  $X$  ein Vektorraum, sogar ein normierter Vektorraum. Sei nun  $(w_1, w_2, \dots)$  eine Cauchyfolge in  $X$ . Allerdings ist  $X$  ein linearer Unterraum von  $C_b^0(\mathbb{R})$ , und dies ist ein Banachraum (und zwar mit derselben Norm wie  $X$ ). Also existiert ein Grenzelement  $w^* \in C_b^0(\mathbb{R})$  mit  $\lim_{n \rightarrow \infty} \|w_n - w^*\|_X = 0$ . Wenn wir gezeigt haben, daß  $w^*$  **gleichmäßig** stetig ist, dann sind wir fertig. Jetzt ist

$$0 = \lim_{n \rightarrow \infty} \|w_n - w^*\|_X = \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in \mathbb{R}} |w_n(x) - w^*(x)|.$$

Für  $\varepsilon > 0$  existiert also ein  $N_0(\varepsilon) > 0$ , sodaß für jedes  $n$  mit  $n > N_0(\varepsilon)$  und jedes  $x \in \mathbb{R}$  gilt:

$$|w_n(x) - w^*(x)| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Wir wählen ein solches  $n$ . Seien  $x_1$  und  $x_2 \in \mathbb{R}$  irgendwie gewählt. Dann ist

$$|w^*(x_1) - w^*(x_2)| \leq |w^*(x_1) - w_n(x_1)| + |w_n(x_1) - w_n(x_2)| + |w_n(x_2) - w^*(x_2)|.$$

Wir wissen bereits, daß der erste Summand und der dritte auf der rechten Seite kleiner sind als  $\varepsilon/3$ . Nun ist aber  $w_n$  eine gleichmäßig stetige Funktion. Also finden wir ein  $\delta > 0$ , sodaß für  $|x_1 - x_2| < \delta$  gilt, daß der mittlere Summand kleiner ist als  $\varepsilon/3$ . Dann haben wir insgesamt

$$|w^*(x_1) - w^*(x_2)| < \varepsilon,$$

falls  $|x_1 - x_2| < \delta$ . Also ist  $w^*$  gleichmäßig stetig. Also ist  $X$  ein Banachraum.

Für den allgemeinen Fall kann insgesamt folgendes bewiesen werden:

**Lemma 2.4.** *Der Generator  $A$  einer stark stetigen Halbgruppe  $(T(t))_{t \geq 0}$  hat folgende Eigenschaften:*

- $D(A)$  ist ein linearer Unterraum von  $X$ ,
- $A$  bildet linear und stetig ab von  $D(A)$  nach  $X$ ,
- wenn  $u_0 \in D(A)$ , dann ist auch  $T(t)u_0 \in D(A)$ , und es ist

$$\frac{d}{dt}T(t)u_0 = T(t)Au_0 = AT(t)u_0, \quad t \geq 0.$$

- Wenn  $t \geq 0$  und  $u_0 \in X$ , dann ist  $\int_{s=0}^t T(s)u_0 ds \in D(A)$ .
- Wenn  $t \geq 0$  und  $u_0 \in X$ , dann ist  $T(t)u_0 - u_0 = A \int_{s=0}^t T(s)u_0 ds$ .
- Wenn  $t \geq 0$  und  $u_0 \in D(A)$ , dann ist  $T(t)u_0 - u_0 = \int_{s=0}^t T(s)Au_0 ds$ .

*Beweis.* Siehe z.B. [4]. □

Weitere Eigenschaften sind:

**Satz 2.5.** *Der Definitionsbereich  $D(A)$  ist dicht in  $X$ . Der Operator  $A$  bestimmt die Halbgruppe  $(T(t))_{t \geq 0}$  eindeutig. Das heißt: wenn zwei Halbgruppen  $(T(t))_{t \geq 0}$  und  $(S(t))_{t \geq 0}$  denselben Generator haben, dann ist  $T(t) = S(t)$  für jedes  $t \geq 0$ .*

*Beweis.* Siehe z.B. [4]. □

Die Dichtheit bedeutet, daß jedes Element aus  $X$  durch Elemente aus  $D(A)$  beliebig gut angenähert werden kann, wobei man den Abstand mit der Norm  $\|\cdot\|_X$  mißt.

Wir kehren wieder zu unserem Beispiel  $T(t)u_0 = u_0(\cdot + ct)$  zurück. Da gilt offensichtlich

$$\|T(t)u_0\|_X = \sup_{x \in \mathbb{R}} |u_0(x + ct)| = \sup_{x \in \mathbb{R}} |u_0(x)| \quad \forall t \geq 0,$$

also ist der Orbit  $\gamma_+(u_0) = \{T(t)u_0 : t \geq 0\}$  beschränkt. Was läßt sich dann über die  $\omega$ -Limesmenge aussagen?

Wenn  $X$  endlichdimensional wäre, dann wüßten wir, daß  $\omega(u_0)$  nichtleer, kompakt, invariant und zusammenhängend ist.

Wir nehmen in unserem Fall z.B.  $u_0 = u_0(x) = \tanh(x)$ . Dann haben wir  $\lim_{t \rightarrow \infty} (T(t)u_0)(x) = 1$  als punktweiser Limes für jedes feste  $x \in \mathbb{R}$ , aber eben keine gleichmäßige Konvergenz. Also ist für diese Anfangsfunktion  $\omega(u_0) = \emptyset$ .

## 2.2 Diffusionsgleichungen

Das Anfangswertproblem zur Diffusionsgleichung wird gegeben durch

$$\begin{cases} u_t(t, x) = \partial_x^2 u(t, x), & (t, x) \in (0, \infty) \times \mathbb{R}, \\ u(0, x) = u_0(x). \end{cases}$$

Mittels Fouriertransformation kann man sich eine Lösungsformel verschaffen, und man kommt auf

$$u(t, x) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \int_{y=-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{(x-y)^2}{4t}\right) u_0(y) dy, \quad t > 0.$$

Diese Formel ergibt z.B. dann die eindeutig bestimmte Lösung, wenn  $u_0$  stetig und beschränkt ist auf  $\mathbb{R}$ . Wir definieren

$$K(t, z) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \exp\left(-\frac{z^2}{4t}\right), \quad (t, z) \in (0, \infty) \times \mathbb{R},$$

und können dann schreiben

$$u(t, x) = (K(t, \cdot) * u_0)(x),$$

wobei das Faltungsintegral sich erstreckt über  $\mathbb{R}_y$ . Es ist bekannt, daß  $K(t, \cdot)$  im  $L^1(\mathbb{R}_x)$  die Norm 1 hat, und damit haben wir nach bekannten Rechenregeln für die Faltung

$$\begin{aligned} \|u(t, \cdot)\|_{L^1(\mathbb{R}_x)} &\leq \|K(t, \cdot)\|_{L^1(\mathbb{R}_x)} \cdot \|u_0\|_{L^1(\mathbb{R}_x)} \leq \|u_0\|_{L^1(\mathbb{R}_x)}, \\ \|u(t, \cdot)\|_{L^\infty(\mathbb{R}_x)} &\leq \|K(t, \cdot)\|_{L^1(\mathbb{R}_x)} \cdot \|u_0\|_{L^\infty(\mathbb{R}_x)} \leq \|u_0\|_{L^\infty(\mathbb{R}_x)}. \end{aligned}$$

Wir haben weiterhin die Abklingabschätzung

$$\|u(t, \cdot)\|_{L^\infty(\mathbb{R}_x)} \leq \|K(t, \cdot)\|_{L^\infty(\mathbb{R}_x)} \cdot \|u_0\|_{L^1(\mathbb{R}_x)} \leq \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \|u_0\|_{L^1(\mathbb{R}_x)}.$$

Eine weitere wichtige Eigenschaft ist die *Glättung*. Das bedeutet, daß  $u$  für positive Zeiten beliebig oft differenzierbar wird, auch wenn  $u_0$  noch nicht einmal stetig ist, sondern lediglich beschränkt.

Zur Verifikation:

$$\begin{aligned} \partial_x u(t, x) &= \int_{y=-\infty}^{\infty} (\partial_x K(t, x-y)) u_0(y) dy, \\ \sup_{x \in \mathbb{R}} |\partial_x u(t, x)| &= \sup_{x \in \mathbb{R}} \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \left| \int_{y=-\infty}^{\infty} -\frac{2(x-y)}{4t} \exp\left(-\frac{(x-y)^2}{4t}\right) u_0(y) dy \right| \quad \left( s = \frac{x-y}{2\sqrt{t}} \right) \\ &= \sup_{x \in \mathbb{R}} \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} \left| \int_{s=-\infty}^{\infty} \frac{-2s}{2\sqrt{t}} \exp(-s^2) u_0(x + 2\sqrt{t}s) ds \right| \\ &\leq \sqrt{\frac{2}{\pi t}} \left( \int_{s=-\infty}^{\infty} |s| \exp(-s^2) ds \right) \sup_{z \in \mathbb{R}} |u_0(z)| \\ &\leq \frac{C}{\sqrt{t}} \sup_{x \in \mathbb{R}} |u_0(x)|. \end{aligned}$$

Allgemeiner kann man nach einem ähnlichen Schema zeigen, daß:

$$\forall n \geq 0 \quad \exists C_n: \|\partial_x^n u(t, \cdot)\|_{C_b^0(\mathbb{R}_x)} \leq C_n t^{-n/2} \|u_0\|_{C_b^0(\mathbb{R}_x)}.$$

Um die Halbgruppentheorie anzuwenden, wählen wir den Zustandsraum

$$X = C_{b,glm}^0(\mathbb{R})$$

und den Operator  $A = \partial_x^2$  mit Definitionsgebiet  $D(A) = C_{b,glm}^2(\mathbb{R})$ . Dieser umfaßt alle Funktionen, die beschränkt und stetig sind, mit beschränkten und stetigen Ableitungen bis zur zweiten Ordnung, und die zweite Ableitung ist sogar gleichmäßig stetig. Die Norm ist  $\|w\|_{D(A)} = \sup_{x \in \mathbb{R}} (|w(x)| + |w'(x)| + |w''(x)|)$ .

Wir führen dann eine Familie  $(T(t))_{t \geq 0}$  von Abbildungen ein durch

$$(T(t)u_0)(x) = \begin{cases} (K(t, \cdot) * u_0)(x) & : t > 0, \\ u_0(x) & : t = 0. \end{cases}$$

Dies ist unser Wunschkandidat für eine  $C_0$ -Halbgruppe. Ob dieser tatsächlich die Bedingungen aus Definition 2.2 erfüllt, muß erst noch gezeigt werden.

Die erste Bedingung ist mittels unserer obigen Abschätzungen sofort gezeigt. Die zweite Bedingung folgt aus der Assoziativität der Faltung

$$(T(t) \circ T(s))u_0 = T(t)(T(s)u_0) = K(t, \cdot) * (K(s, \cdot) * u_0) = (K(t, \cdot) * K(s, \cdot)) * u_0.$$

Es bleibt nur noch zu zeigen, daß  $K(t, \cdot) * K(s, \cdot) = K(t+s, \cdot)$ . Das erledigt man durch Ausrechnen, zum Beispiel mittels Fouriertransformation.

Bleibt noch die starke Stetigkeit.

**Satz 2.6.** Falls  $u_0 \in X$ , dann ist  $\lim_{t \rightarrow +0} u(t, \cdot) = u_0(\cdot)$  mit Konvergenz in der Norm von  $X$ .

*Beweis.* Wir schreiben  $G(z) = \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \exp(-z^2/4)$ ; das  $G$  steht für Gauß und seine Glockenfunktion. Dann haben wir

$$\begin{aligned} \|u(t, \cdot) - u_0\|_X &= \sup_{x \in \mathbb{R}} |u(t, x) - u_0(x)| \\ &= \sup_{x \in \mathbb{R}} \left| \int_{y=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{t}} G\left(\frac{x-y}{\sqrt{t}}\right) (u_0(y) - u_0(x)) dx \right| \\ &= \sup_{x \in \mathbb{R}} \left| \int_{z=-\infty}^{\infty} G(z) (u_0(x + \sqrt{t}z) - u_0(x)) dz \right| \\ &\leq \sup_{x \in \mathbb{R}} \int_{|z| \leq M} G(z) |u_0(x + \sqrt{t}z) - u_0(x)| dz \\ &\quad + \sup_{x \in \mathbb{R}} \int_{|z| \geq M} G(z) |u_0(x + \sqrt{t}z) - u_0(x)| dz \end{aligned}$$

Hierbei können wir  $M$  noch frei wählen.

Sei ein positives  $\varepsilon$  gegeben. Wenn wir  $M$  groß genug wählen, dann können wir erreichen, daß

$$\left| \int_{|z| \geq M} \dots dz \right| \leq 2 \|u_0\|_{C_b^0(\mathbb{R})} \int_{|z| \geq M} G(z) dz \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Nachdem  $M$  fixiert ist, wählen wir anschließend eine positive Schranke  $t_0$ , sodaß für  $0 < t \leq t_0$  gilt:

$$\left| u_0(x + \sqrt{t}z) - u_0(x) \right| \leq \frac{\varepsilon}{2}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad |z| \leq M.$$

Das ist möglich, weil  $u_0$  *gleichmäßig* stetig ist, anstatt von lediglich einfacher Stetigkeit.

Dann gilt für  $0 < t \leq t_0$  die gewünschte Ungleichung  $\|u(t, \cdot) - u_0\|_X \leq \varepsilon$ . □

## 2.3 Dispersion

Dispersion ist ein Phänomen bei der Wellenausbreitung und bedeutet, daß die Phasengeschwindigkeit einer Welle abhängig ist von der Wellenlänge dieser Welle. Als Konsequenz sind dann Gruppen- und Phasengeschwindigkeit verschieden.

Als Differentialgleichung wählen wir die Schrödingergleichung in der Form von

$$\begin{cases} \partial_t u(t, x) = -i \partial_x^2 u(t, x), & (t, x) \in (0, \infty) \times \mathbb{R}, \\ u(0, x) = u_0(x), & x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Zur Lösung verwenden wir die Fouriertransformation:

$$\hat{u}(t, \xi) := \int_{x=-\infty}^{\infty} e^{-ix\xi} u(t, x) dx.$$

Dann folgt  $\partial_t \hat{u}(t, \xi) = i\xi^2 \hat{u}(t, \xi)$ . Diese gewöhnliche Differentialgleichung kann man schnell lösen, und wir bekommen  $\hat{u}(t, \xi) = \exp(i\xi^2 t) \hat{u}_0(\xi)$  oder auch

$$u(t, x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\xi=-\infty}^{\infty} \exp(i(x\xi + t\xi^2)) \hat{u}_0(\xi) d\xi.$$

Insbesondere stellen wir fest, daß es Lösungen der Form

$$u(t, x) = \exp(i(x\xi + t\xi^2))$$

gibt, wobei  $\xi \in \mathbb{R}$  fixiert ist. Zum Wellenzahlvektor  $\xi$  haben wir also  $\omega(\xi) = \xi^2$ , und die Phasengeschwindigkeit ist definiert als

$$c_p = \frac{\omega(\xi)}{\xi} = \xi.$$

Offensichtlich hängt  $c_p$  von  $\xi$  ab, was genau das Phänomen der Dispersion ist. Die Gruppengeschwindigkeit ist

$$c_g = \frac{d\omega(\xi)}{d\xi} = 2\xi.$$

Dies bedeutet: ein Wellenpaket, das sich vorwiegend aus Anteilen mit hohem Wert des Wellenzahlvektors  $|\xi|$  zusammensetzt (also eine „hohe Rauigkeit“ hat), bewegt sich deutlich schneller als ein anderes Wellenpaket, dessen Anteile einem niedrigen Wert von  $|\xi|$  entsprechen. Solche Wellenpakete mit großen Werten von  $|\xi|$  tragen entscheidend dazu bei, daß die Lösung  $u$  nur eine geringe Regularität besitzt. Wenn wir uns jetzt für ein beschränktes Gebiet des  $\mathbb{R}_x$  interessieren, dann kann folgendes passieren:

- Ein sich dort aufhaltendes Wellenpaket mit „hoher Rauigkeit“ verläßt das interessante Gebiet sehr schnell. Das wäre angenehm, weil die übrigen Bestandteile dann zu einer höheren Regularität von  $u$  führen.
- Ein Wellenpaket „hoher Rauigkeit“, das zum Zeitpunkt  $t = 0$  sehr weit entfernt ist, kann sich sehr schnell nähern und die ursprünglich in dem interessanten Gebiet vorhandene hohe Regularität von  $u$  zerstören. Das wäre unangenehm. Wenn allerdings die Werte der Anfangsfunktion  $u_0$  für  $|x| \rightarrow \infty$  „schnell genug“ abklingen, dann wird dieser Effekt begrenzt. Die genauere Bedeutung von „schnell genug“ klären wir weiter unten.

Wenn man in der obigen Lösungsdarstellung noch etwas weiterrechnet und die Variable  $\xi$  eliminiert, dann folgt

$$u(t, x) = \frac{1}{\sqrt{4\pi it}} \int_{y=-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{i(x-y)^2}{4t}\right) u_0(y) dy, \quad (2.1)$$

also eine Formel mit leichten Ähnlichkeiten zur Lösungsformel der Diffusionsgleichung. Aber auch mit erheblichen Unterschieden: denn bei der Diffusionsgleichung stand im Integranden eine Gauß-Glocke, welche die Konvergenz des Integrals für  $|y| \rightarrow \infty$  erheblich erleichtert hatte. Im Prinzip jede praktisch relevante Funktion  $u_0$  führte auf ein konvergentes Integral.

Dies ist bei der Dispersionsgleichung anders, denn der Exponentialterm hat immer den Betrag 1.

Zunächst tragen wir einige einfach zu zeigende Eigenschaften zusammen: Aus der Physik ist unter dem Stichwort *Energieerhaltung* bekannt, daß

$$\partial_t \|u(t, \cdot)\|_{L^2(\mathbb{R}_x)}^2 = 0.$$

Weiterhin haben wir die Abklingabschätzung

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} |u(t, x)| \leq \frac{C}{\sqrt{t}} \int_{y=-\infty}^{\infty} |u_0(y)| dy.$$

Für Glättungseigenschaften untersuchen wir

$$\partial_x u(t, x) = \frac{1}{\sqrt{4\pi it}} \int_{y=-\infty}^{\infty} \frac{-2i(x-y)}{4t} \exp\left(-\frac{i(x-y)^2}{4t}\right) u_0(y) dy.$$

Daraus folgt: wenn  $\int_{y=-\infty}^{\infty} |y| \cdot |u_0(y)| dy < \infty$ , dann existiert  $\partial_x u(t, x)$ . Wir interpretieren das wie folgt: das Abklingen der Anfangsfunktion  $u_0$  für  $|y| \rightarrow \infty$  wird eingetauscht für eine bessere Glattheit der Funktion  $u(t, \cdot)$  im Falle von  $t > 0$ .

Wir können diese Argumentation auch wiederholen: wenn  $\int_{y=-\infty}^{\infty} |y|^n \cdot |u_0(y)| dy < \infty$ , dann ist  $u(t, \cdot) \in C_b^n(\mathbb{R}_x)$  für alle  $t > 0$ . Ein noch besseres Abklingen von  $u_0$  wird also eingetauscht gegen eine noch bessere Regularität von  $u$  für  $t > 0$ .

Aus der Darstellungsformel (2.1) sehen wir, daß für  $u_0 \in C_{b,glm}^0(\mathbb{R}_x)$  die Existenz des Integrals gar nicht gesichert ist, weil unklar ist, ob der Integrand für  $|y| \rightarrow \infty$  schnell genug abklingt.

Als Ausweg wählen wir für den Zustandsraum  $X = L^2(\mathbb{R})$ . Dann ist  $A = -i\partial_x^2$  mit  $D(A) = \{v \in L^2(\mathbb{R}) : v'' \in L^2(\mathbb{R})\}$ , was gleich dem Sobolevraum  $H^1(\mathbb{R}) = W_2^1(\mathbb{R})$  ist.

Tatsächlich gibt es dann wieder eine  $C_0$ -Halbgruppe.

## 2.4 Lösungsbegriffe

Sei  $A$  der Erzeuger einer stark stetigen Halbgruppe  $(T(t))_{t \geq 0}$  auf einem Banachraum  $X$ . Wir wollen Lösungen zum Problem

$$\begin{cases} \partial_t u = Au + f(t), & t \in (0, \infty), \\ u(0) = u_0 \end{cases} \quad (2.2)$$

untersuchen, wobei  $u_0$  und  $f$  gegeben sind. Idealerweise würden wir uns wünschen, daß alle relevanten Terme im herkömmlichen Sinne existieren. Das führt uns auf den Begriff der klassischen Lösung:

**Definition 2.7 (Klassische Lösung).** Eine Funktion  $u = u(t) : [0, \infty) \rightarrow X$  heißt klassische Lösung zum Anfangswertproblem (2.2), wenn

- $u \in C([0, \infty), X)$ ,
- $u \in C^1((0, \infty), X)$ ,
- $u \in C((0, \infty), D(A))$

gilt, und wenn  $u$  das obige Problem (2.2) löst, wobei  $u_0 \in X$  und  $f \in C((0, \infty), X)$ .

Die erste Bedingung fordert, daß  $u$  stetig mit Werten in  $X$  bis zum Punkt  $t = 0$  einschließlich ist; was bedeutet, daß die Anfangswertbedingung  $u(0) = u_0$  sinnvoll wird. Die zweite und dritte Bedingung fordern, daß  $\partial_t u$  sowie  $Au$  jeweils Funktionen aus dem  $C((0, \infty), X)$  liefern.

Nun hat es sich allerdings herausgestellt, daß diese Forderungen an den Lösungskandidaten  $u$  zu hart sind. Häufig gelingt es nicht oder nur unter Mühen, nachzuweisen, daß die vermutete Lösung tatsächlich so glatt ist wie in der Definition gefordert. Aus diesem Grunde führen wir schwächere Lösungsbegriffe ein, wie zum Beispiel das Konzept der *milden Lösung*.

Sei  $0 \leq s \leq t$ , und sei  $u$  eine klassische Lösung. Wir halten  $t$  fest und lassen  $s$  variabel. Dann setzen wir

$$g(s) := T(t-s)u(s).$$

Wegen  $u(s) \in D(A)$  (falls  $s > 0$ ) und  $t - s \geq 0$  ist dann auch  $g(s) \in D(A)$ , und wir haben, (unter der unwichtigen Einschränkung  $0 < s < t$ )

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds}g(s) &= \left( \frac{d}{ds}T(t-s) \right) u(s) + T(t-s) \frac{d}{ds}u(s) \\ &= -AT(t-s)u(s) + T(t-s)(Au(s) + f(s)) \\ &= -T(t-s)Au(s) + T(t-s)Au(s) + T(t-s)f(s) \\ &= T(t-s)f(s). \end{aligned}$$

Zusätzlich zu  $f \in C((0, \infty), X)$  setzen wir jetzt nur  $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}, X)$  voraus, also

$$\int_{t=0}^{t_*} \|f(t)\|_X dt < \infty, \quad \forall t_* < \infty.$$

Dann ist die Abbildung  $s \mapsto T(t-s)f(s)$  integrierbar, und wir können die Ableitung  $\partial_s g(s)$  integrieren auf dem Intervall  $(0, t)$ :

$$\begin{aligned} g(t) - g(0) &= \int_{s=0}^t T(t-s)f(s) ds, \\ g(t) &= T(t-t)u(t) = u(t), \\ g(0) &= T(t)u(0) = T(t)u_0, \end{aligned}$$

also ergibt sich insgesamt die Darstellung

$$u(t) = T(t)u_0 + \int_{s=0}^t T(t-s)f(s) ds.$$

Das bedeutet insbesondere, daß es nur eine einzige klassische Lösung geben kann.

**Bemerkung 2.8.** Im Falle von  $X = \mathbb{R}^n$  ist  $A$  eine Matrix aus dem  $\mathbb{R}^{n \times n}$ , und dann wird die Lösung  $u = u(t)$  zum Anfangswertproblem (2.2) gerade gegeben durch

$$u(t) = e^{At}u_0 + \int_{s=0}^t e^{A(t-s)}f(s) ds,$$

womit die obige Lösungsdarstellung ganz natürlich erscheint.

**Definition 2.9 (Milde Lösung).** Sei  $A$  der Erzeuger einer stark stetigen Halbgruppe  $(T(t))_{t \geq 0}$ , und sei  $u_0 \in X$  sowie  $f \in L^1_{\text{loc}}((0, \infty), X)$ . Dann heißt die Funktion  $u = u(t)$  mit  $u \in C([0, \infty), X)$  sowie

$$u(t) = T(t)u_0 + \int_{s=0}^t T(t-s)f(s) ds, \quad t \in (0, \infty),$$

milde Lösung zum Problem (2.2).

Wir haben bereits gezeigt, daß jede klassische Lösung eine milde Lösung ist, wenn  $f \in L^1_{\text{loc}}((0, \infty), X)$ . Die Umkehrung gilt, wenn man die Voraussetzungen an  $f$  und  $u_0$  deutlich verschärft, zum Beispiel zu  $f \in C^1([0, \infty), X)$  und  $u_0 \in D(A)$ .

**Bemerkung 2.10.** Die Begriffe der klassischen bzw. milden Lösung lassen sich natürlich auch für ein beschränktes Zeitintervall  $(0, T_0)$  anstelle des Zeitintervalles  $(0, \infty)$  definieren.

## 2.5 Die KPP-Gleichung

Die Abkürzung KPP steht für die Namen KOLMOGOROV, PETROVSKY, PISKUNOV, aber die Gleichung ist auch unter der Bezeichnung FISHER-Gleichung bekannt. Es geht um das Anfangswertproblem

$$\begin{cases} \partial_t u(t, x) = \partial_x^2 u(t, x) + u(t, x) - (u(t, x))^2, & (t, x) \in (0, \infty) \times \mathbb{R}, \\ u(0, x) = u_0(x), & x \in \mathbb{R}. \end{cases} \quad (2.3)$$

Hierbei ist  $u$  eine reellwertige Funktion, die eine Konzentration eines chemischen Stoffes oder einer Spezies bezeichnet. Negative Werte von  $u$  wären also inhaltlich unsinnig.

Angenommen,  $u$  wäre unabhängig von  $x$ , also  $u(t, x) = v(t)$  für alle  $(t, x)$ , dann hätten wir  $\dot{v}(t) = v - v^2$ , was genau die Gleichung für das logistische Wachstum ist. Wir wissen bereits, daß diese Gleichung zwei stationäre Punkte besitzt, wobei  $v = 1$  asymptotisch stabil ist, und  $v = 0$  instabil.

Wenn wir nun zu der Gleichung des logistischen Wachstums noch einen Diffusionsterm hinzufügen, dann bekommen wir die KPP-Gleichung. Als Zustandsraum wählen wir, genau wie bei der Diffusionsgleichung,

$$X = C_{b,glm}^0(\mathbb{R}).$$

Wir setzen  $A = \partial_x^2$  mit  $D(A) = C_{b,glm}^2(\mathbb{R})$ ; und wir führen den Nichtlinearitätsterm  $N(u) = u - u^2$  ein. Offensichtlich bildet  $N$  den Raum  $X$  in sich ab. Dann haben wir die abstrakte Formulierung

$$\begin{cases} \partial_t u(t) = Au + N(u), & t \in (0, \infty), \\ u(0) = u_0. \end{cases}$$

**Satz 2.11.** *Sei  $u_0 \in X$ . Dann existiert genau eine milde lokale milde Lösung. Das heißt: es gibt ein  $T_0 > 0$ , sodaß genau eine Funktion  $u \in C([0, T_0], X)$  existiert, die eine milde Lösung zu (2.3) ist.*

*Beweis.* Wir gehen analog zum Beweis des Satzes von Picard–Lindelöf vor und verwenden den Banach-Fixpunktsatz im Banachraum  $X_{T_0}$ , wobei

$$X_{T_0} = C^0([0, T_0], X).$$

Hierbei ist  $T_0$  passend gewählt. Die Norm ist gegeben durch  $\|f\|_{X, T_0} = \sup_{[0, T_0]} \|f(t)\|_X$ .

Die milde Lösung (wenn es sie gibt) erfüllt, per definitionem, die Gleichung

$$u(t) = T(t)u_0 + \int_{s=0}^t T(t-s)(N(u))(s) \, ds, \quad 0 < t \leq T_0,$$

wobei  $(T(t))_{t \geq 0}$  die Halbgruppe zum Erzeuger  $A$  ist.

Im Banachraum  $X_{T_0}$  wählen wir eine abgeschlossene Menge  $M$ ,

$$M = \left\{ u \in C^0([0, T_0], X) : \|u\|_{X, T_0} \leq C_1 \right\}, \quad C_1 := 2 \|u_0\|_X.$$

Nun kann man schnell zeigen, daß

$$\begin{aligned} \|T(t)u_0\|_X &\leq \|u_0\|_X, & 0 \leq t < \infty, \\ \|N(u)\|_X &\leq \|u\|_X + \|u\|_X^2, \end{aligned}$$

und somit haben wir, für  $u, v \in M$ , die Abschätzungen

$$\begin{aligned} \|N(u)\|_{X, T_0} &\leq C_1 + C_1^2, \\ \|N(u) - N(v)\|_{X, T_0} &\leq \|u - v\|_{X, T_0} + \|(u + v)(u - v)\|_{X, T_0} \leq (1 + 2C_1) \|u - v\|_{X, T_0}. \end{aligned}$$

Wir betrachten nun eine Abbildung  $u \mapsto \mathcal{L}(u)$  mit

$$(\mathcal{L}(u))(t) := T(t)u_0 + \int_{s=0}^t T(t-s)(N(u))(s) \, ds, \quad 0 \leq t \leq T_0.$$

Die Konstante  $T_0$  wählen wir so klein, daß  $(1 + C_1)T_0 \leq \frac{1}{2}$  gilt.

$\mathcal{L}$  bildet  $M$  in sich ab: das folgt aus der folgenden Ungleichungskette, wenn  $(1 + C_1)T_0 \leq \frac{1}{2}$ :

$$\begin{aligned} & \sup_{[0, T_0]} \left\| T(t)u_0 + \int_{s=0}^t T(t-s)(N(u))(s) \, ds \right\|_X \\ & \leq \sup_{[0, T_0]} \|T(t)u_0\|_X + \sup_{[0, T_0]} \int_{s=0}^t \|T(t-s)(N(u))(s)\|_X \, ds \\ & \leq \|u_0\|_X + \sup_{[0, T_0]} \int_{s=0}^t \|(N(u))(s)\|_X \, ds \\ & \leq \|u_0\|_X + T_0(C_1 + C_1^2) \\ & \leq C_1, \end{aligned}$$

denn es ist  $\|u_0\|_X = \frac{1}{2}C_1$ .

$\mathcal{L}$  kontrahiert auf  $M$ : unter der üblichen Voraussetzung an  $T_0$  ist nämlich

$$\begin{aligned} \|\mathcal{L}(u) - \mathcal{L}(v)\|_{X, T_0} &= \sup_{[0, T_0]} \left\| \int_{s=0}^t T(t-s)((N(u) - N(v))(s)) \, ds \right\|_X \\ &\leq \sup_{[0, T_0]} \int_{s=0}^t \|T(t-s)((N(u) - N(v))(s))\|_X \, ds \\ &\leq \sup_{[0, T_0]} \int_{s=0}^t \|(N(u) - N(v))(s)\|_X \, ds \\ &\leq T_0 \|N(u) - N(v)\|_{X, T_0} \\ &\leq T_0(1 + 2C_1) \|u - v\|_{X, T_0} \\ &\leq \frac{1}{2} \|u - v\|_{X, T_0}. \end{aligned}$$

Dann können wir den Fixpunktsatz von Banach anwenden und bekommen eine eindeutig bestimmte milde Lösung auf einem kleinen Zeitintervall  $[0, T_0)$ .  $\square$

Nachdem man die Existenz einer milden Lösung gesichert hat, zeigt man in einem zweiten Schritt, daß diese milde Lösung sogar eine klassische Lösung ist, wenn  $u_0 \in D(A)$ . Hierbei benutzt man wesentlich, daß die Halbgruppe zum Diffusionsoperator nicht nur stark stetig ist, sondern sogar eine sogenannte *analytische Halbgruppe* ist. Für die Einzelheiten eines solchen Beweises verweisen wir auf die Vorlesung zu Halbgruppen.

Es wird sich herausstellen, daß diese Lösung (im einzig relevanten Fall von nichtnegativen Anfangsdaten) sogar global existiert, wegen des Maximumprinzips:

**Lemma 2.12 (Maximumprinzip).** *Es seien  $u_1$  und  $u_2$  zwei klassische Lösungen auf  $[0, t_*] \times \mathbb{R}$  mit  $u_1(t_0, x) < u_2(t_0, x)$  für ein gewisses  $t_0 \in (0, t_*)$  und sämtliche  $x \in \mathbb{R}$ .*

*Dann ist  $u_1(t, x) < u_2(t, x)$  für alle  $(t, x) \in (t_0, t_*] \times \mathbb{R}$ .*

*Beweisskizze.* Wir wissen, daß  $u_1$  und  $u_2$  stetige Funktionen von  $(t, x)$  sind. Wir nehmen für einen indirekten Beweis an, daß  $u_1(t_1, x_0) = u_2(t_1, x_0)$  für ein  $(t_1, x_0) \in (t_0, t_*) \times \mathbb{R}$ . Wir können annehmen, daß  $(u_2 - u_1)(t_1, \cdot)$  in  $x_0$  ein Minimum hat. Dann folgt  $\partial_x^2(u_2 - u_1)(t_1, x_0) \geq 0$  bzw.  $> 0$  im „nicht-entarteten Fall“.

Wir haben dann

$$\begin{aligned} \partial_t(u_2(t_1, x_0) - u_1(t_1, x_0)) &= \partial_x^2(u_2(t_1, x_0) - u_1(t_1, x_0)) + (u_2(t_1, x_0) - u_1(t_1, x_0)) \\ &\quad - (u_2^2(t_1, x_0) - u_1^2(t_1, x_0)) \\ &= \partial_x^2(u_2(t_1, x_0) - u_1(t_1, x_0)) + 0 - 0. \end{aligned}$$

Im „nicht-entarteten Fall“ ist dann  $\partial_t(u_2(t_1, x_0) - u_1(t_1, x_0)) > 0$ , und somit ist „im nächsten Moment“ wieder  $u_2(t, x_0) > u_1(t, x_0)$ , bzw. es war „kurz zuvor“ sogar  $u_2(t, x_0) < u_1(t, x_0)$ . Dann könnte man  $t_1$  kleiner wählen und so einen Widerspruch anstreben.

Offen bleibt noch die Diskussion des „entarteten Falles“  $\partial_x^2(u_2(t_1, x_0) - u_1(t_1, x_0)) = 0$ .  $\square$

Daraus folgt dann die globale Existenz klassischer Lösungen.

**Satz 2.13.** *Sei  $u$  eine klassische Lösung zu (2.3) auf der Menge  $(0, T_0) \times \mathbb{R}$  mit  $u_0 \in D(A)$  und  $u_0(x) \geq 0$  für alle  $x \in \mathbb{R}$ . Dann ist  $\sup_{[0, T_0] \times \mathbb{R}} |u(t, x)| < \infty$ . Insbesondere kann man dann die Lösung auf ein größeres Gebiet  $[0, T_0 + \varepsilon] \times \mathbb{R}$  fortsetzen.*

*Beweis.* Wir wählen  $0 < \gamma \ll 1$  und setzen  $M_+ = \sup_{x \in \mathbb{R}} u_0(x) + \gamma$  sowie  $M_- = -\gamma$ . Sei  $u_+ = u_+(t, x)$  die Lösung zu (2.3) mit Anfangswerten  $M_+$ , und sei  $u_- = u_-(t, x)$  die Lösung zu (2.3) mit Anfangswerten  $M_-$ .

Wegen der Eindeutigkeit milder Lösungen hängen  $u_+$  und  $u_-$  nicht von  $x$  ab, denn ihre Anfangswerte sind unabhängig von  $x$ . Dann ist

$$\begin{aligned} \partial_t u_+ &= u_+ - u_+^2, & u_+(0) &= M_+, \\ \partial_t u_- &= u_- - u_-^2, & u_-(0) &= M_-, \end{aligned}$$

und wir können  $u_+$  und  $u_-$  explizit berechnen. Wir stellen fest, daß  $u_+$  für alle positiven Zeiten existiert, und daß die Lebensdauer von  $u_-$  beliebig groß gemacht werden kann, wenn man nur  $\gamma$  genügend klein wählt. Weiterhin ist  $u_-(t) < u(t, x) < u_+(t)$  für  $0 \leq t \leq T_0$ . Also kann  $u$  nicht in endlicher Zeit explodieren, und  $u$  kann auch nicht negativ werden.  $\square$

Das Maximumprinzip ist auch als Vergleichsprinzip oder Monotonieprinzip bekannt und hat eine Reihe von Anwendungen.

**Lemma 2.14.** *Der Fixpunkt  $u^* \equiv 0$  ist instabil im Raum  $X$ .*

*Beweis.* Wir nehmen Anfangsdaten  $u_0 = u_0(x) \equiv \delta$  für ein  $\delta$  mit  $0 < \delta \ll 1$ . Die Lösung  $u = u(t, x)$  zu diesen Anfangswerten ist unabhängig von  $x$  und strebt nach 1, entfernt sich also von  $u^*$ .  $\square$

**Lemma 2.15.** *Der Fixpunkt  $u^* \equiv 1$  ist asymptotisch stabil in  $X$ .*

*Beweis.* Seien Anfangsdaten  $u_0$  gegeben mit  $\|u_0 - u^*\|_X = \sup_{x \in \mathbb{R}} |u_0(x) - 1| < \delta$ . Wir wollen zeigen, daß  $\lim_{t \rightarrow \infty} \|u(t, \cdot) - u^*\|_X = 0$ , wünschenswerterweise mit einer nachgewiesenen Mindestgeschwindigkeit für die Konvergenz. Dazu nehmen wir Anfangswerte

$$u_{0,+} = u_{0,+}(x) \equiv 1 + 2\delta, \quad u_{0,-} = u_{0,-}(x) \equiv 1 - 2\delta, \quad x \in \mathbb{R}$$

und nennen die dazugehörigen Lösungen  $u_+$  und  $u_-$ . Dann haben wir  $u_-(t, x) < u(t, x) < u_+(t, x)$  für alle  $(t, x) \in (0, \infty) \times \mathbb{R}$ , wegen des Vergleichsprinzips. Nun sind aber  $u_+$  und  $u_-$  unabhängig von  $x$ , also Lösungen der bereits untersuchten logistischen Gleichung, von der wir bereits wissen, daß der Fixpunkt 1 asymptotisch stabil ist.  $\square$

Wir können das Vergleichsprinzip auch benutzen, um die Ausbreitungsgeschwindigkeit von Lösungen zu Anfangsdaten mit kompaktem Träger zu untersuchen: Dazu sei  $u_0$  eine Anfangsfunktion mit  $0 \leq u_0(x) < 1$  für alle  $x \in \mathbb{R}$ , und sei  $u_0(x) = 0$  für  $|x| > R$ . Wir wissen aus Abschnitt 1.12, daß es Lösungen  $u = u(t, x)$  in Form wandernder Wellen gibt mit  $u(t, x) = v(x - ct)$ , wobei  $|c| \geq 2$ . Je nach Vorzeichen von  $c$  läuft diese wandernde Welle nach links oder rechts. Wir wählen  $c = 2$  und finden zwei Wellenprofile  $v_-$  und  $v_+$  mit

$$u_0(x) < v_-(x), \quad u_0(x) < v_+(x), \quad x \in \mathbb{R},$$

wobei  $v_-$  für eine nach links laufende Welle steht und  $v_+$  für eine nach rechts laufende. Dann gelten für alle  $(t, x) \in (0, \infty) \times \mathbb{R}$  die Ungleichungen

$$0 \leq u(t, x) < v_-(x + 2t), \quad 0 \leq u(t, x) < v_+(x - 2t).$$

In diesem Sinne können wir sagen, daß die Anfangsinformation zur Zeit  $t = 0$  sich maximal mit Geschwindigkeit 2 ausbreitet.

Als nächstes widmen wir uns der Frage, inwieweit Frontlösungen sich ändern, wenn ihre Anfangsdaten gestört werden. Sei z.B.  $u = u(t, x) = v(x - ct)$  eine solche Frontlösung (nach rechts laufend) mit Anfangswerten  $u_0(x) = v(x)$ . Aus der Diskussion des Abschnitts 1.12 wissen wir, daß  $\lim_{x \rightarrow -\infty} u_0(x) = 1$  und  $\lim_{x \rightarrow +\infty} u_0(x) = 0$ . Weiterhin ist  $u_0$  eine streng monoton fallende Funktion von  $x$ . Nun betrachten wir Anfangswerte

$$\tilde{u}_0(x) = \min(u_0(x), \delta),$$

für ein  $\delta$  mit  $0 < \delta \ll 1$ . Dann gilt  $\|u_0 - \tilde{u}_0\|_X = \delta \ll 1$ . Andererseits ist  $\tilde{u}_0(x) > \delta/2$  für alle  $x \in \mathbb{R}$ , und die Lösung mit Anfangswerten  $\delta/2$  auf ganz  $\mathbb{R}$  strebt nach 1, wie bereits aus den Untersuchungen zur logistischen Gleichung bekannt. Nach dem Vergleichsprinzip strebt die Lösung zu Anfangswerten  $\tilde{u}_0$  dann ebenfalls nach 1 (und zwar in der Topologie von  $X$ , also mit gleichmäßiger Konvergenz bezüglich  $x$ ), entfernt sich also von der typischen Gestalt der Frontlösungen.

Andererseits sind Frontlösungen stabil gegenüber Störungen mit kompaktem Träger: Sei  $u(t, x) = v(x - ct)$  eine Frontlösung mit Anfangswerten  $u_0(x) = v(x)$ . Sei  $\tilde{u}_0$  eine Anfangsfunktion mit

$$0 < \tilde{u}_0(x) < 1, \quad x \in \mathbb{R}$$

und  $\tilde{u}_0(x) = u_0(x)$  für alle  $x$  außerhalb eines beschränkten Intervalls. Dann finden wir verschobene Anfangswerte  $u_{0,l}$  und  $u_{0,r}$  der Form

$$u_{0,l}(x) = u_0(x + C_l), \quad u_{0,r}(x) = u_0(x + C_r),$$

sodaß  $u_{0,l}(x) < \tilde{u}_0(x) < u_{0,r}(x)$  für alle  $x \in \mathbb{R}$  gilt. Seien  $u_l$  und  $u_r$  die dazugehörigen Frontlösungen:

$$u_l(t, x) = u_{0,l}(x - ct), \quad u_r(t, x) = u_{0,r}(x - ct).$$

Nach dem Vergleichsprinzip ist dann  $u_l(t, x) < u(t, x) < u_r(t, x)$ , also bleibt der Graph von  $u$  eingesperrt zwischen den Graphen zweier Frontlösungen  $u_l$  und  $u_r$ , die sich beide mit derselben Geschwindigkeit bewegen.

## 2.6 Die Gleichung von BURGERS

Die (viskose) Gleichung von Burgers lautet

$$\partial_t u = \partial_x^2 u - u \partial_x u,$$

wobei  $(t, x) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$ . Anwendungen finden sich beim Beschreiben von viskosen kompressiblen Fluiden im  $\mathbb{R}^1$  oder auch in der Verkehrssimulation.

Wir interpretieren diese Gleichung als ein parabolisches Problem mit einem weiteren Term  $u \partial_x u$  niedriger Ordnung. Dementsprechend wählen wir als Grundraum

$$X = C_{b,glm}^0(\mathbb{R}).$$

**Satz 2.16.** *Sei  $u_0 \in X$ . Dann gibt es genau eine lokale milde Lösung  $u \in C([0, t_0], X)$  mit  $u(0) = u_0$ .*

*Beweis.* Im Prinzip genauso wie bei KPP. □

**Satz 2.17.** *Seien  $u_1$  und  $u_2$  zwei Lösungen auf  $[0, t_*] \times \mathbb{R}$  mit  $u_1(t_0, x) < u_2(t_0, x)$  für ein  $t_0 \in (0, t_*)$  und alle  $x \in \mathbb{R}$ . Dann ist auch  $u_1(t, x) \leq u_2(t, x)$  für alle  $(t, x) \in (t_0, t_*] \times \mathbb{R}$ .*

*Beweis.* Im Prinzip genauso wie bei KPP. □

**Folgerung 2.18.** *Klassische Lösungen zu Anfangsdaten  $u_0 \in D(A)$  existieren für alle positiven Zeiten.*

Wir suchen auch bei der Burgers-Gleichung wandernde Wellen. Der Ansatz  $u(t, x) = v(x - ct)$  führt uns dann auf

$$-cv' = v'' - vv'.$$

Nach Integration erhalten wir dann

$$cv + v' - \frac{1}{2}v^2 + d = 0,$$

wobei  $d$  sich als Integrationskonstante ergibt. Es ist natürlich, zu erwarten bzw. zu wünschen, daß die Lösung  $v = v(s)$  für  $s \rightarrow \pm\infty$  sich an feste Werte annähert:

$$\lim_{s \rightarrow -\infty} v(s) = v_-, \quad \lim_{s \rightarrow +\infty} v(s) = v_+, \quad \lim_{s \rightarrow \pm\infty} v'(s) = 0.$$

Daraus gewinnen wir die Relationen

$$cv_{\pm} - \frac{1}{2}v_{\pm}^2 + d = 0.$$

Das können wir als quadratische Gleichung für  $v$  interpretieren, oder als Gleichung für  $c$  und  $d$  bei gegebenen  $v_+$ ,  $v_-$ :

$$\begin{pmatrix} v_+ & 1 \\ v_- & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} v_+^2 \\ v_-^2 \end{pmatrix}.$$

Insgesamt läßt sich zeigen: solche Frontlösungen existieren, falls  $\frac{v_+ - v_-}{c} > 0$ .

Während bei der viskosen Burgers-Gleichung klassische Lösungen global existieren, ist die bei der *nicht*-viskosen Gleichung anders. Diese wird gegeben durch

$$\partial_t u = -u\partial_x u,$$

oder auch  $\partial_t u + u\partial_x u = 0$ . Dies ist interpretierbar als eine nichtlineare Transportgleichung, die man mittels der Charakteristikenmethode direkt lösen kann. Die Charakteristiken sind Geraden mit der Gleichung  $x_0 + u_0(x_0)t = \text{const.}$  . Und weil die Lösung entlang einer Charakteristik konstant ist, folgt

$$u(t, x_0 + u_0(x_0)t) = u_0(x_0), \quad \forall (t, x_0) \in [0, \infty) \times \mathbb{R}.$$

Zu jeder solchen Charakteristik gehört im  $(t, x)$ -Diagramm ein Anstieg  $u_0(x_0)$ . Entlang dieser Charakteristik hat  $u$  den Wert  $u_0(x_0)$ . Und wenn sich nun zwei solche verschiedenen Charakteristiken für ein  $t > 0$  schneiden, dann kann dort die Lösung nicht zwei verschiedene Werte haben; es bildet sich also eine Singularität in endlicher Zeit (ein sogenannter Schock).

Als Ergebnis bekommen wir, daß die Existenz zeitglobaler Lösungen bei der nichtviskosen Burgers-Gleichung nur in Ausnahmefällen möglich ist.

## 2.7 Die KORTEVEG – DE VRIES – Gleichung

Die Gleichung von Kortevæg und de Vries lautet

$$\partial_t u = -\partial_x^3 u + 6u\partial_x u, \quad (t, x) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R};$$

zumindest ist dies die Version, auf die wir unsere Untersuchungen beschränken. Eine besondere Rolle spielen solche Gleichungen bei Untersuchungen von ein-dimensionalen Wasserwellen und Solitonen. Weiterführende Darlegungen sind in [1] zu finden.

Um das Verhalten der Lösungen ein Stück weit zu verstehen, zerlegen wir die Gleichung in zwei Teile.

Der linearisierte Teil lautet

$$\partial_t u = -\partial_x^3 u;$$

diese Gleichung kann zum Beispiel mittels Fouriertransformation gelöst werden. Unter der Annahme von  $u(t, \cdot) \in L^2(\mathbb{R})$ ,  $\partial_t u(t, \cdot) \in L^2(\mathbb{R})$  und  $\partial_x^3 u(t, \cdot) \in L^2(\mathbb{R})$  erhält man

$$\partial_t \|u(t, \cdot)\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} = -2 \int_{\mathbb{R}} u \partial_x^3 u \, dx = 2 \int_{\mathbb{R}} (\partial_x u)(\partial_x^2 u) \, dx = \int_{\mathbb{R}} \partial_x ((\partial_x u)^2) \, dx = 0,$$

also  $\|u(t, \cdot)\|_{L^2(\mathbb{R})} = \|u(0, \cdot)\|_{L^2(\mathbb{R})}$ . Diese Identität interpretieren wir als „Energieerhaltung“. Man beachte, daß  $\partial_x u$  dieselbe Gleichung löst wie  $u$ ; also gilt auch (unter geeigneten Voraussetzungen an die Glattheit und das Abklingen)  $\|\partial_x u(t, \cdot)\|_{L^2(\mathbb{R})} = \|\partial_x u(0, \cdot)\|_{L^2(\mathbb{R})}$ .

Weiterhin kann man zeigen, zum Beispiel über die Fouriertransformation, daß die Lösung gleichmäßig abklingt:

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} |u(t, x)| \leq Ct^{-1/3} \int_{\mathbb{R}} |u(0, x)| \, dx.$$

Da nun die Lösung in der  $L^\infty$ -Norm abklingt, aber die  $L^2$ -Norm erhalten bleibt, kann dies nur bedeuten, daß die Energie über den gesamten  $\mathbb{R}_x$  verteilt wird. Dies ist in Übereinstimmung damit, daß auch bei der linearisierten Kortevæg–de Vries–Gleichung Dispersion zu beobachten ist, genauso wie bei der freien Schrödinger–Gleichung.

Der andere Bestandteil von KdV lautet

$$\partial_t u = 6u \partial_x u,$$

und er verhält sich offensichtlich genauso wie die Burgers–Gleichung. Das bedeutet also die Erzeugung von Sprungstellen in endlicher Zeit sowie die Konzentration der Energie  $\|\partial_x u(t, \cdot)\|_{L^2(\mathbb{R})}$  in einem Punkt.

Für die volle KdV–Gleichung haben wir damit zwei konkurrierende Einflüsse ausgemacht mit entgegengesetzten „Zielen“:

- Dispersion: also die Verteilung der Energie auf ganz  $\mathbb{R}$ ,
- Erzeugung von Singularitäten: also die Konzentration der Energie an einer Stelle.

Die Frage ist nun, was dies alles für das Verhalten der Lösungen bedeutet.

Zunächst suchen wir wie immer wandernde Wellen:

$$u(t, x) = v(x - ct) = v(\xi).$$

Wir bekommen damit  $-cv' = -v''' + 6vv'$ , also nach Integration die Gleichung

$$-cv + v'' - 3v^2 = \text{const.}$$

Wir wünschen uns in unserer Situation  $\lim_{|\xi| \rightarrow \infty} v(\xi) = 0$  sowie  $\lim_{|\xi| \rightarrow \infty} v''(\xi) = 0$ , woraus sich die Integrationskonstante zu 0 ergibt.

Als nächstes schaffen wir den Parameter  $c$  fort. Dazu setzen wir

$$\xi = \frac{1}{\sqrt{c}} \zeta, \quad v(\xi) = c \tilde{v}(\zeta).$$

Daraus ergibt sich dann  $v''(\xi) = c^2 \tilde{v}''(\zeta)$ , und wir erhalten die Dgl

$$-\tilde{v}(\zeta) + \tilde{v}''(\zeta) - 3\tilde{v}^2(\zeta) = 0.$$

Wir setzen  $w = \tilde{v}'$ , und es ergibt sich das System

$$\begin{cases} \tilde{v}' = w, \\ w' = \tilde{v} + 3\tilde{v}^2 \end{cases}$$

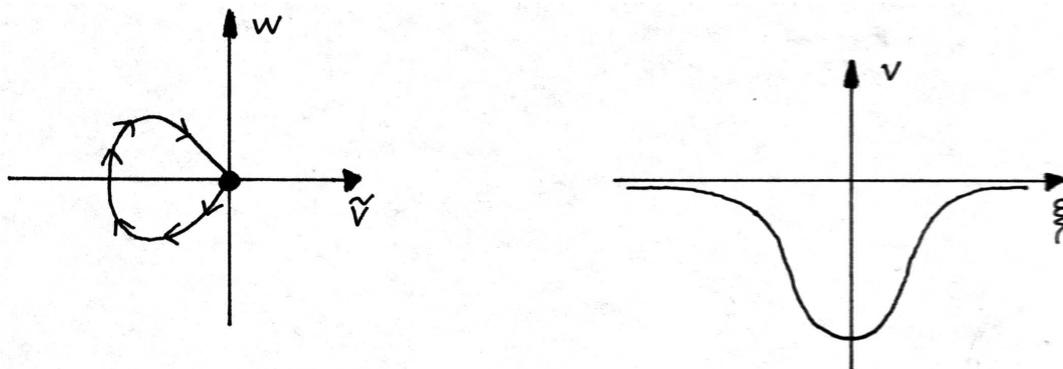


Abbildung 2.1:

mit einer Lösung wie in Abbildung 2.1. Bemerkenswert ist, daß man die Lösung  $\tilde{v}$  sogar explizit angeben kann, woraus dann auch einer Darstellung für  $u$  folgt:

$$u(t, x) = -\frac{2c}{\cosh^2(\sqrt{c}(x - 4ct))}.$$

Beachtenswert ist der Zusammenhang zwischen Höhe bzw. „Breite“ dieser Welle sowie der Ausbreitungsgeschwindigkeit  $c$ .

In einem nächsten Schritt betrachten wir die KdV-Gleichung als HAMILTONSches System. Dazu führen wir den Hamiltonian

$$H(u) = \int_{\mathbb{R}} \left( \frac{u_x^2}{2} + u^3 \right) dx$$

ein und betrachten die Gateaux-Ableitung von  $H$  an der Stelle  $u$ , in Richtung einer Funktion  $v \in C_0^\infty(\mathbb{R}_x)$ :

$$\begin{aligned} (\partial_u H)[v] &:= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} (H(u + \varepsilon v) - H(u)) \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} \int_{\mathbb{R}_x} \left( \frac{((u + \varepsilon v)_x)^2}{2} - \frac{u_x^2}{2} + (u + \varepsilon v)^3 - u^3 \right) dx \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{2} (2u_x \varepsilon v_x + \varepsilon^2 v_x^2) + 3u^2 \varepsilon v + 3u \varepsilon^2 v^2 + \varepsilon^3 v^3 dx \\ &= \int_{\mathbb{R}} -u_{xx} v + 3u^2 v dx \\ &= \int_{\mathbb{R}} (-u_{xx} + 3u^2) v dx. \end{aligned}$$

Der letzte Term ergibt einen Sinn für  $v \in X = L^2(\mathbb{R}; \mathbb{R})$ , und dieses Integral ist eine reelle Zahl. Damit bekommen wir eine Abbildung

$$\begin{aligned} \partial_u H: v &\mapsto (\partial_u H)[v], \\ \partial_u H: X &\rightarrow \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Also interpretieren wir  $\partial_u H$  als Element des Dualraums  $X' = \mathcal{L}(X; \mathbb{R})$ . Nun ist aber  $X = L^2(\mathbb{R})$  ein Hilbertraum. Aus dem Darstellungssatz von Riesz folgt dann, daß jedes Element  $g \in X'$  geschrieben werden kann mit Hilfe eines  $\tilde{g} \in X$  und dem Skalarprodukt:

$$g(v) = \langle \tilde{g}, v \rangle_{L^2} = \int_{\mathbb{R}} \tilde{g}(x) v(x) dx, \quad \forall v \in L^2(\mathbb{R}).$$

Die Abbildung von  $g$  zum eindeutig bestimmten  $\tilde{g}$  schreiben wir als  $\beta$ , also  $\tilde{g} = \beta g$ .

Für  $g = \partial_u H \in X'$  lautet  $\tilde{g}$  gerade  $\tilde{g} = -u_{xx} + 3u^2 \in X$ .

Insgesamt haben wir damit, wenn  $u = u(t, x)$  eine Lösung von KdV ist,

$$\partial_t u = -\partial_x^3 u + 3\partial_x(u^2) = \partial_x(-u_{xx} + 3u^2) = \partial_x \tilde{g} = \partial_x(\beta g) = \partial_x(\beta \partial_u H),$$

oder auch

$$\partial_t u = J\beta \partial_u H$$

mit  $Jw := \partial_x w$ . Man beachte, daß  $J$  schief-symmetrisch ist, denn

$$\langle Jw, v \rangle = \int_{\mathbb{R}} w_x v \, dx = - \int_{\mathbb{R}} w v_x \, dx = - \langle w, Jv \rangle.$$

**Bemerkung 2.19.** Wir erinnern, daß ein herkömmliches hamiltonsches System der Form

$$\begin{cases} \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q}, \\ \dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p} \end{cases}$$

auch geschrieben werden kann als

$$\partial_t \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -I \\ I & 0 \end{pmatrix} \nabla H = J \nabla H,$$

und  $J$  ist schief-symmetrisch im Sinne von  $J^\top = -J$ . Die Entsprechung ergibt sich durch  $\nabla \cong \beta \partial_u$ .

Es ist zu erwarten, daß ein hamiltonsches System Erhaltungsgrößen aufweist. Und ein vollständig integrabiles System hat unendlich viele solche Erhaltungsgrößen. Eine einfach zu erratende ist die  $L^2$ -Norm:

$$\begin{aligned} \partial_t \int_{\mathbb{R}} u^2(t, x) \, dx &= \int_{\mathbb{R}} 2u_t u_x \, dx = 2 \int_{\mathbb{R}} u(-u_{xxx} + 6uu_x) \, dx \\ &= 2 \int_{\mathbb{R}} u_x u_{xx} + 2(u^3)_x \, dx = 2 \int_{\mathbb{R}} \partial_x (u_x^2 + 2u^3) \, dx \\ &= 0. \end{aligned}$$

Für weitere Erhaltungsgrößen sollten wir zuerst unser Ziel festlegen:

**Definition 2.20.** Eine Gleichung der Form  $\partial_t T(t, x) + \partial_x X(t, x) = 0$  heißt Erhaltungssatz.

Als Begründung für diese Begriffswahl nehmen wir an, daß  $T \in C^1(\mathbb{R}_t; L^1(\mathbb{R}))$  und  $X \in C(\mathbb{R}_t; W_1^1(\mathbb{R}))$ . Dann ist

$$\partial_t \int_{\mathbb{R}_x} T(t, x) \, dx = \int_{\mathbb{R}} \partial_t T(t, x) \, dx = - \int_{\mathbb{R}} \partial_x X(t, x) \, dx = -X(t, x) \Big|_{x=-\infty}^{x=+\infty} = 0,$$

und somit  $\int_{\mathbb{R}_x} T(t, x) \, dx = \text{const.}$  bezüglich  $t$ .

Offensichtlich ist

$$\partial_t u + \partial_x (\partial_x^2 u - 3u^2) = 0,$$

also ist  $\int_{\mathbb{R}} u(t, x) \, dx$  eine Erhaltungsgröße.

Garantiert nicht mehr offensichtlich ist

$$\partial_t \left( u^3 + \frac{1}{2} u_x^2 \right) + \partial_x \left( -\frac{9}{2} u^4 + 3u^2 u_{xx} - 6uu_x^2 + u_x u_{xxx} - \frac{1}{2} u_x^3 \right) = 0.$$

Wenn wir nun  $T_3(t, x) = u^3(t, x) + \frac{1}{2} u_x^2(t, x)$  setzen, dann bekommen wir  $\int_{\mathbb{R}} T_3(t, x) \, dx = \text{const.}$  als Erhaltungsgröße.

Die nächste Erhaltungsgröße ist  $T_4 = 5u^4 + 10uu_x^2 + u_{xx}^2$ .

Wie kommt man nun darauf? Die Antwort liegt in der MIURA-Transformation. Dazu nehmen wir an, daß  $u = u(t, x)$  eine reell-wertige Lösung der KdV-Gleichung ist, und daß für jedes  $\varepsilon$  mit  $|\varepsilon| \ll 1$  eine komplex-wertige Funktion  $w = w(t, x)$  existiert, für die

$$u(t, x) = w(t, x) + i\varepsilon w_x(t, x) - \varepsilon^2 w^2(t, x), \quad (t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R},$$

gilt. Weiterhin setzen wir voraus, daß diese Funktion  $w$  glatt ist, daß sämtliche Ableitungen von  $w$  gleichmäßig in  $\varepsilon$  beschränkt sind, und daß  $w$  (zusammen mit allen Ableitungen) für  $|x| \rightarrow \infty$  verschwindet.

Der Frage, ob es denn überhaupt eine solche Funktion  $w$  mit diesen vielen Eigenschaften gibt, wollen wir nicht nachgehen.

Formal stellen wir nach  $w$  um:

$$\begin{aligned} w &= u - i\varepsilon w_x + \varepsilon^2 w^2 \\ &= u - i\varepsilon(u - i\varepsilon w_x + \varepsilon^2 w^2)_x + \varepsilon^2(u - i\varepsilon w_x + \varepsilon^2 w^2)^2 \\ &= u - i\varepsilon u_x - \varepsilon^2 w_{xx} - i\varepsilon^3 (w^2)_x + \varepsilon^2 u^2 + \varepsilon^2 \cdot 2u \cdot (-i\varepsilon w_x) + \dots \end{aligned}$$

Nach diesem Schema ersetzen wir jedes rechts auftauchende  $w$  durch  $u - i\varepsilon w_x + \varepsilon^2 w^2$ , rekursiv immer wieder aufs Neue. Wenn wir diesen Prozeß genügend viele Schritte durchlaufen lassen, bekommen wir

$$w = \sum_{k=0}^N \varepsilon^k P_k(u) + \mathcal{O}(\varepsilon^{N+1}),$$

wobei  $P_k(u)$  einen Term bezeichnet, der auf gewisse Weise von  $u$  und dessen Ableitungen abhängt, und der Rest-Term darf noch Bestandteile von  $w$  enthalten. Wenn wir dann formal  $N \rightarrow \infty$  schicken, bekämen wir eine asymptotische Reihe  $\sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k P_k(u)$ , über deren Konvergenz nichts bekannt ist. Die zentrale Idee im Folgenden wird sein, für diese asymptotische Reihe einen Koeffizientenvergleich gleicher Potenzen von  $\varepsilon$  zu veranstalten.

Auf jeden Fall ist

$$\begin{aligned} 0 &= \partial_t u + \partial_x^3 u - 6uu_x \\ &= (w + i\varepsilon w_x - \varepsilon^2 w^2)_t + (w + i\varepsilon w_x - \varepsilon^2 w^2)_{xxx} - 6(w + i\varepsilon w_x - \varepsilon^2 w^2)(w + i\varepsilon w_x - \varepsilon^2 w^2)_x \\ &= \varepsilon^0 (w_t + w_{xxx} - 6ww_x) \\ &\quad + i\varepsilon (w_{xt} + w_{xxxx} - 6w_x w - 6w_{xx} w) + i\varepsilon (6\varepsilon^2 w_x (w^2)_x + 6w^2 w_{xx}) \\ &\quad - \varepsilon^2 (2ww_t + (w^2)_{xxx} - 6w_x w_{xx} - 6w(w^2)_x - 6w^2 w_x + 6\varepsilon^2 w^2 (w^2)_x) \\ &= \varepsilon^0 (w_t + w_{xxx} - 6ww_x + 6\varepsilon^2 w^2 w_x) \\ &\quad - i\varepsilon \partial_x (w_t + w_{xxx} - 6ww_x + 6\varepsilon^2 w^2 w_x) \\ &\quad - 2\varepsilon^2 w (w_t + w_{xxx} - 6ww_x + 6\varepsilon^2 w^2 w_x). \end{aligned}$$

Damit gilt folgendes: wenn  $w$  die **modifizierte** KdV-Gleichung

$$w_t + w_{xxx} - 6ww_x + 6\varepsilon^2 w^2 w_x = 0$$

löst, dann ist  $u$  eine Lösung von KdV. Nun setzen wir

$$I_\varepsilon(t) = \int_{\mathbb{R}_x} w(t, x) dx.$$

Die modifizierte KdV-Gleichung können wir schreiben als  $\partial_t w + \partial_x (w_{xx} - 3w^2 + 2\varepsilon^2 w^3) = 0$ . Integration dieser Identität über  $\mathbb{R}_x$  liefert dann  $\partial_t I_\varepsilon(t) = 0$ , also ist  $I_\varepsilon$  unabhängig von  $t$ .

Und nun rechnen wir wie folgt:

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k \cdot 0 &= 0 \\ &= \partial_t I_\varepsilon(t) \\ &= \partial_t \int_{\mathbb{R}} \sum_{k=0}^N \varepsilon^k P_k(u) \, dx + \partial_t \int_{\mathbb{R}} \mathcal{O}(\varepsilon^{N+1}) \, dx \\ &= \sum_{k=0}^N \varepsilon^k \partial_t \int_{\mathbb{R}} P_k(u) \, dx + \partial_t \int_{\mathbb{R}} \mathcal{O}(\varepsilon^{N+1}) \, dx. \end{aligned}$$

Ein Koeffizientenvergleich entsprechender Potenzen von  $\varepsilon$  links und rechts (den man natürlich noch rechtfertigen muß) liefert uns dann viele Erhaltungsgrößen: für jeden Exponenten eine. Wir haben also  $P_k(u) = T_k(t, x)$ . Zum Beispiel gilt

$$I_\varepsilon(t) = \int_{\mathbb{R}} (u - i\varepsilon u_x + \varepsilon^2(u^2 + u_{xx}) + i\varepsilon^3(\dots) + \dots) \, dx.$$

Der Term  $\varepsilon^0$  ergibt uns genau  $\int_{\mathbb{R}} u \, dx = \text{const.}$ . Der nächste Term ist uninteressant. Der Term zu  $\varepsilon^2$  liefert uns die Identität  $\int_{\mathbb{R}} u^2 \, dx = 0$ , und der Term mit  $\varepsilon^3$  bringt uns genau  $T_3$ .

Zum Abschluß betrachten wir **Zwei**er-Solitonen. Dabei geht es um Folgendes. Bekanntlich ist die KdV-Gleichung nichtlinear, weshalb das Superpositionsprinzip nicht gelten kann. Wir kennen bereits Lösungen zu KdV, die aus einem einzelnen Soliton bestehen.

Kann dann die „Überlagerung“ zweier verschiedener Solitonen wieder eine Lösung ergeben? Die Antwort ist JA: es ist möglich, daß zwei Solitonen einander begegnen, durchdringen oder überholen, und dann ihren jeweiligen Weg fortsetzen, als ob nichts geschehen wäre. Und daß, obwohl die Gleichung nichtlinear ist.

Die dabei eingesetzte Methode ist die sogenannte **inverse Streutransformation**.

Sei  $u = u(t, x)$  eine beschränkte Lösung zu KdV. Wir betrachten dann den Operator  $L = L(t)$ , definiert durch

$$L(t)v(x) = -\partial_x^2 v(x) + u(t, x)v(x).$$

Das ist also eine stationäre Schrödingergleichung mit Potential  $u(t)$ . Bekanntlich ist der Operator  $L$  selbstadjungiert im  $L^2(\mathbb{R}_x)$ , also

$$\langle Lv, w \rangle = \langle v, Lw \rangle$$

und  $D(L) = D(L^*) = H^2(\mathbb{R}_x)$ . Der Operator  $L(t)$  hat diskretes und kontinuierliches Spektrum:

$$\begin{aligned} \lambda \in \sigma_{\text{disk}}(L(t)) &: \Leftrightarrow \exists v \in H^2(\mathbb{R}) \text{ mit } Lv = \lambda v \text{ und } v \neq 0 \Leftrightarrow L - \lambda \text{ nicht injektiv,} \\ \lambda \in \sigma_{\text{cont}}(L(t)) &: \Leftrightarrow L(t) - \lambda \text{ injektiv, } R(L(t) - \lambda) \text{ dicht in } L^2(\mathbb{R}), \text{ aber } R(L(t) - \lambda) \neq L^2(\mathbb{R}). \end{aligned}$$

Hierbei bezeichnet  $R(L(t) - \lambda)$  den Bildraum des Operators  $L(t) - \lambda$ . Das diskrete Spektrum wird auch als Punktspektrum bezeichnet, es kann auch leer sein. Zum Beispiel hat  $-\partial_x^2$  auf  $L^2(\mathbb{R}_x)$  nur  $\sigma_{\text{cont}} = [0, \infty)$ .

In  $X = C_{b, \text{glm}}^0$  gibt es endlich viele Eigenwerte  $0 > \lambda_1 > \lambda_2 > \dots > \lambda_N$ , und ein Kontinuum  $[0, \infty)$  als kontinuierliches Spektrum. Wir schreiben  $\lambda(k) = k^2$  als Element von  $\sigma_{\text{cont}}$ .

Zu  $\lambda_1, \dots, \lambda_N$  haben wir dann Eigenfunktionen  $\psi_k$  mit  $\int_{\mathbb{R}} |\psi_k(x)|^2 \, dx = 1$  und asymptotischem Verhalten

$$\psi_k(x) \sim \begin{cases} e^{-\kappa_k x} & : x \rightarrow +\infty, \\ e^{\kappa_k x} & : x \rightarrow -\infty. \end{cases}$$

Hierbei ist  $\kappa_k^2 = -\lambda_k$ .

Zu den Einträgen  $\lambda(k) = k^2$  des diskreten Spektrums haben wir „Eigenfunktionen“  $\psi(k, x)$  mit

$$\psi(k, x) \sim \begin{cases} e^{-ikx} + b(k)e^{ikx} & : x \rightarrow +\infty, \\ a(k)e^{-ikx} & : x \rightarrow -\infty. \end{cases}$$

Das bedeutet: für ein gegebenes Potential  $u = u(t, x)$  haben wir Streudaten

$$(\lambda_k(t), c_k(t))_{k=1, \dots, N} \quad \text{sowie} \quad (\lambda(t, k), b(t, k))_{k \in \mathbb{R}}.$$

Es läßt sich zeigen (mit größerem Aufwand):

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \lambda_k(t) &= 0, & \frac{d}{dt} \lambda(t, k) &= 0, \\ \frac{d}{dt} c_k(t) &= 4\kappa_k^3 c_k(t), & \frac{d}{dt} b(t, k) &= -8ikb(t, k). \end{aligned}$$

Es folgt, daß  $\lambda_k$  und  $\lambda(\cdot, k)$  Erhaltungsgrößen sind.

Nun interessieren wir uns für die umgekehrte Richtung: seien die Daten  $a, b, c$  und  $\lambda$  gegeben. Wie sieht dann  $u$  aus ?

Die Antwort können wir hier nur angeben und anhand eines Beispiels illustrieren, aber nicht begründen.

Zur Vereinfachung der Notation lassen wir oft die Variable  $t$  weg. Dann wird  $u = u(x)$  gegeben durch

$$u(x) = -2 \frac{d}{dx} K(x, x),$$

wobei  $K = K(x, z)$  Lösung ist zu

$$K(x, z) + F(x+z) + \int_{y=x}^{\infty} K(x, y) F(y+z) dy = 0, \quad \forall z, \quad (2.4)$$

wobei

$$F(x) = \sum_{j=1}^N c_j^2 e^{-\kappa_j x} + \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{ikx} b(k) dk.$$

Die Frage der Existenz und Eindeutigkeit der Lösung  $K$  einer solchen Integralgleichung lassen wir offen.

Als Beispiel nehmen wir  $N = 2$  sowie  $\kappa_1 = 1, \kappa_2 = 2$  mit  $c_1 = \sqrt{5}$  und  $c_2 = \sqrt{7}$ . Weiterhin sei  $b(0, k) = 0$  für alle  $k$ . Dann folgt sofort  $b(t, k) = 0$  als Lösung der Differentialgleichung für  $b(\cdot, k)$ . Wenn wir weiterhin die Differentialgleichungen für  $c_k$  lösen, bekommen wir

$$c_1(t) = \sqrt{5} e^{4t}, \quad c_2(t) = \sqrt{7} e^{32t}.$$

Ab jetzt wird die  $t$ -Abhängigkeit der Funktion  $c_k, F_k, K$  und  $l_k$  nicht mehr erwähnt ( $F_k$  und  $l_k$  werden gleich definiert).

Wir haben dann

$$F(x) = F_1(x) + F_2(x) = 5e^{8t-x} + 7e^{64t-2x}.$$

Für  $K = K(x, z)$  machen wir den Ansatz

$$K(x, z) = l_1(x)e^{-z} + l_2(x)e^{-2z},$$

mit im Moment noch unbekanntenen Funktionen  $l_1$  und  $l_2$ . Mit diesem Ansatz gehen wir in (2.4) hinein und bekommen:

$$\begin{aligned} 0 &= l_1(x)e^{-z} + l_2(x)e^{-2z} + F_1(x)e^{-z} + F_2(x)e^{-2z} \\ &+ \int_{y=x}^{\infty} (l_1(x)e^{-y} + l_2(x)e^{-2y}) (F_1(z)e^{-y} + F_2(z)e^{-2y}) dy. \end{aligned}$$

Nun ist aber

$$\int_{y=x}^{\infty} e^{-\alpha y} dy = \frac{e^{-\alpha x}}{\alpha},$$

und somit bekommen wir

$$\begin{aligned} 0 &= l_1(x)e^{-z} + l_2(x)e^{-z} + F_1(x)e^{-z} + F_2(x)e^{-2z} \\ &\quad + l_1(x)F_1(z) \cdot \frac{1}{2}e^{-2x} + l_1(x)F_2(z) \cdot \frac{1}{3}e^{-3x} \\ &\quad + l_2(x)F_1(z) \cdot \frac{1}{3}e^{-3x} + l_2(x)F_2(z) \cdot \frac{1}{4}e^{-4x}. \end{aligned}$$

Wir erinnern an  $F_1(z) = 5e^{8t-z}$  und  $F_2(z) = 7e^{64t-2z}$ .

Ein Koeffizientenvergleich bezüglich der linear unabhängigen Funktionen  $z \mapsto e^{-z}$  und  $z \mapsto e^{-2z}$  führt uns dann zu

$$\begin{aligned} 0 &= l_1(x) + F_1(x) + l_1(x) \cdot \frac{1}{2} \cdot 5e^{8t-2x} + l_2(x) \cdot \frac{1}{3} \cdot 5e^{8t-3x}, \\ 0 &= l_2(x) + F_2(x) + l_1(x) \cdot \frac{1}{3} \cdot 7e^{64t-3x} + l_2(x) \cdot \frac{1}{4} \cdot 7e^{64t-4x}. \end{aligned}$$

Dies können wir umschreiben zu

$$\begin{pmatrix} 1 + \frac{5}{2}e^{8t-2x} & \frac{5}{3}e^{8t-3x} \\ \frac{7}{3}e^{64t-3x} & 1 + \frac{7}{4}e^{64t-4x} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l_1(x) \\ l_2(x) \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} F_1(x) \\ F_2(x) \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} 5e^{8t-x} \\ 7e^{64t-2x} \end{pmatrix}.$$

Mittels Cramerscher Regel kommen wir dann auf

$$\begin{aligned} D &= \left(1 + \frac{5}{2}e^{8t-2x}\right) \left(1 + \frac{7}{4}e^{64t-4x}\right) - \frac{35}{9}e^{64t-3x}e^{8t-3x} \\ &= 1 + \frac{5}{2}e^{8t-2x} + \frac{7}{4}e^{64t-4x} + \frac{35}{72}e^{72t-6x}, \\ l_1(x) &= \frac{1}{D} \det \begin{pmatrix} -5e^{8t-x} & \frac{5}{3}e^{8t-3x} \\ -7e^{64t-2x} & 1 + \frac{7}{4}e^{64t-4x} \end{pmatrix} = \frac{1}{D} \left(-5e^{8t-x} + \frac{35}{12}e^{72t-5x}\right), \\ l_2(x) &= \frac{1}{D} \det \begin{pmatrix} 1 + \frac{5}{2}e^{8t-2x} & -5e^{8t-x} \\ \frac{7}{3}e^{64t-3x} & -7e^{64t-2x} \end{pmatrix} = \frac{1}{D} \left(-7e^{64t-2x} + \frac{35}{6}e^{72t-4x}\right). \end{aligned}$$

Insgesamt bekommen wir dann

$$u(t, x) = -2\partial_x (l_1(t, x)e^{-x} + l_2(t, x)e^{-2x}).$$

Das kann man dann umformen zu

$$\frac{144e^{72t+6x} (2520 + 1975 \cosh(64t - 4x) + 4984 \cosh(8t - 2x) + 3415 \sinh(64t - 4x) + 9016 \sinh(8t - 2x))}{(35e^{72t} + 72e^{6x} + 126e^{64t+2x} + 180e^{8t+4x})^2}.$$

Es sollte auch möglich sein, diesen Ausdruck so umzuformen, daß sämtliche noch verbliebenen exp- und sinh-Terme ausgetauscht werden gegen cosh-Terme, sodaß am Ende nur noch  $\cosh(2x - 8t)$ ,  $\cosh(4x - 64t)$ ,  $\cosh(x - 28t)$  und  $\cosh(3x - 36t)$  übrig bleiben.

Ein anderer schöner Zweier-Soliton ist in [1] angegeben:

$$u(t, x) = -12 \frac{3 + 4 \cosh(2x - 8t) + \cosh(4x - 64t)}{(3 \cosh(x - 28t) + \cosh(3x - 36t))^2}.$$

Das interessante  $x$ -Gebiet ist jeweils  $[-30, 30]$  für ein Zeitintervall  $[-8, 8]$ .



# Anhang A

## Lineare Algebra

*Beweis zu Lemma 1.29.* Wenn die Eigenwerte von  $A$  reell und verschieden sind, dann bestehen die Spalten von  $P^{-1}$  aus den reellen Eigenvektoren, und Fall 1 liegt vor.

Wenn die Eigenwerte von  $A$  reell und gleich sind, dann bestehen die Spalten von  $P^{-1}$  aus Eigenvektoren bzw. Hauptvektoren, und es liegt Fall 1 oder Fall 2 vor.

Wenn die Eigenwerte von  $A$  nicht-reell sind, dann sind sie verschieden, und wir haben also einen Eigenwert  $\mu = \alpha + i\beta$  mit  $\beta \neq 0$  und  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ . Der Eigenvektor  $w$  hat die Gestalt  $w = w_1 + iw_2$  mit  $w_1, w_2 \in \mathbb{R}^2$  und

$$A(w_1 + iw_2) = (\alpha + i\beta)(w_1 + iw_2).$$

Die Vektoren  $w_1$  und  $w_2$  sind linear unabhängig; ansonsten hätten wir z.B.  $w_1 = \gamma w_2$  mit einem  $\gamma \in \mathbb{R}$ , und also (nach Division durch  $(\gamma + i)$ ) die Gleichung  $Aw_2 = (\alpha + i\beta)w_2$ . Die linke Seite ist reell, die rechte Seite nicht.

Wir haben also die Gleichungen

$$Aw_1 = \alpha w_1 - \beta w_2, \quad Aw_2 = \beta w_1 + \alpha w_2.$$

Nun stellen wir die Spaltenvektoren  $w_1$  und  $w_2$  nebeneinander und nennen die entstehende (invertierbare) Matrix  $P^{-1}$ . Dann erhalten wir

$$AP^{-1} = P^{-1}J$$

mit der Matrix  $J$  wie im dritten Fall. □



# Literaturverzeichnis

- [1] H. U. Andreas Müller-Rettkowski and G. Schneider. Lecture notes for the seminar ss06 about partial differential equations, 2006.
- [2] V. Arnold. *Ordinary differential equations. Translated by Roger Cooke.* Springer, 1992.
- [3] M. Eastham. *The spectral theory of periodic differential equations.* Texts in Mathematics. Edinburgh-London: Scottish Academic Press. X, 130 p., 1973.
- [4] K.-J. Engel and R. Nagel. *A short course on operator semigroups.* Universitext. Springer., 2006.
- [5] J. K. Hale and H. Koçak. *Dynamics and bifurcations.* Texts in Applied Mathematics. 3. New York etc.: Springer-Verlag, 1991.
- [6] D. Kondepudi and I. Prigogine. *Modern Thermodynamics. From Heat Engines to Dissipative Structures.* John Wiley and Sons, 1998.
- [7] M. Reissig and K. Yagdjian.  $L_p$ - $L_q$  estimates for the solutions of hyperbolic equations of second order with time dependent coefficients. Technical Report 98-5, TU Bergakademie Freiberg, 1998.
- [8] R. Strichartz. A priori estimates for the wave equation and some applications. *J. Funct. Anal.*, 5:218–235, 1970.
- [9] V. Yakubovich and V. Starzhinskij. *Linear differential equations with periodic coefficients. Vol. 1, 2.* New York - Toronto: John Wiley& Sons; Jerusalem - London: Israel Program for Scientific Translations, a Halsted Press Book. XII, 839 p., 1975.