Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
M. Dreher

19.10.2007

Übungen zur Mathematik für Physiker I, Blatt 1

Die Lösungen sind abzugeben am Freitag, 26.10.2007, vor Beginn der Vorlesung.

1. Man zeige durch Nachrechnen, daß für alle komplexen Zahlen r, w, z die folgenden Beziehungen gelten:

$$
\begin{aligned}
&(r \cdot w) \cdot z = r \cdot (w \cdot z), \\
&|r \cdot w| = |r| \cdot |w|.
\end{aligned}
$$

2. Welche der folgenden 'Rechenregeln' sind für alle $z, w \in \mathbb{C}$ richtig? Beweisen Sie die wahren Aussagen und widerlegen Sie die falschen durch Angabe eines Gegenbeispiels.

   (a) $\Im(\mathrm{i} \cdot z) = \Re z$,

   (b) $\Re(\mathrm{i} \cdot z) = \Im z$,

   (c) $\overline{z \cdot \overline{w}} = \overline{z} \cdot w$.

3. Beweisen Sie, daß für alle $t \in \mathbb{R}$ und $\omega \in \mathbb{R}$ die folgende Identität

$$
\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t} + \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega t + \frac{2\pi}{3})} + \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega t + \frac{4\pi}{3})} = 0
$$

   gilt. Was bedeutet diese Gleichung in der Elektrotechnik ?

4. Es seien $z, w \in \mathbb{C}$. Beweisen Sie die sogenannte *Parallelogrammgleichung* und zeichnen Sie eine Skizze:

$$
|z + w|^2 + |z - w|^2 = 2(|z|^2 + |w|^2).
$$

5. *Freiwillige Zusatzaufgabe*

   Beweisen Sie, daß für beliebige komplexe Zahlen z und w gilt:

$$
|1 - z\overline{w}|^2 - |z - w|^2 = (1 - |z|^2)(1 - |w|^2).
$$

Hinweis zu den Aufgaben 4 und 5: Es ist am besten, wenn Sie bei diesen Aufgaben die komplexen Zahlen als solche verwenden, und nicht alles nach Real– und Imaginärteil aufdröseln. Die Relation $r \cdot \overline{r} = |r|^2$ für $r \in \mathbb{C}$ könnte zum Beispiel nützlich sein.

Aufgaben zum Selberkorrigieren bzw. Gegenseitigkorrigieren

6. Stellen Sie die folgenden komplexen Zahlen in der Form $a + b\mathrm{i}$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ dar:

$$(2+3\mathrm{i})(1-\mathrm{i}), \qquad (-\mathrm{i})^2, \qquad \tfrac{\mathrm{i}}{2\mathrm{i}-1}, \qquad \left(-\tfrac{1}{2}+\tfrac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}\right)^3, \qquad \left(-\tfrac{1}{2}-\tfrac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}\right)^3.$$

Antwort: $5+\mathrm{i}$, -1, $\frac{2}{5}-\frac{1}{5}\mathrm{i}$, 1, 1.

7. Vervollständigen Sie die Gleichungen nach dem Schema „kartesische Form“=„Polarkoordinatenform“:

$$\begin{aligned} \mathrm{i} &= 1 \cdot \left(\cos\frac{\pi}{2} + \mathrm{i}\sin\frac{\pi}{2}\right), \\ 1+\mathrm{i} &= \\ -3+3\mathrm{i} &= \\ &= 2\cdot(\cos 5\pi + \mathrm{i}\sin 5\pi) \\ -1-\sqrt{3}\mathrm{i} &= \\ &= 2\cdot(\cos(-\pi) + \mathrm{i}\sin(-\pi)) \end{aligned}$$

8. Stellen Sie in der Form $a + b\mathrm{i}$ dar:

$$\frac{(1+2\mathrm{i})^2}{2+3\mathrm{i}}, \quad \frac{1+2\mathrm{i}}{(2+3\mathrm{i})^2}, \quad \left(\frac{4-\mathrm{i}}{2+\mathrm{i}}\right)^2.$$