Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik 26.10.2007
M. Dreher

Übungen zur Mathematik für Physiker I, Blatt 2

Die Lösungen sind abzugeben am Freitag, 2.11.2007, vor Beginn der Vorlesung.

1. (a) Der Einheitskreis (also die Kreislinie) in der komplexen Zahlenebene sei mit S^1 bezeichnet. Zeigen Sie: wenn $z \in S^1$, dann ist $z^{-1} = \overline{z}$. Wenn $z, w \in S^1$, dann ist auch $z \cdot w \in S^1$ und $z/w \in S^1$.

   (b) Finden Sie alle Zahlen $z \in \mathbb{C}$ mit $z^2 = 1$; und zeichnen Sie diese in der komplexen Zahlenebene. Analog für die Gleichungen $z^4 = 1$, $z^5 = 1$ und $z^3 = -1$.

   (c) Stellen Sie in der Form $a + b\mathrm{i}$ dar:

$$\frac{1}{\mathrm{i}}, \quad \frac{1}{1+\mathrm{i}}, \quad \frac{1}{1-\mathrm{i}}, \quad \mathrm{i}^k, \quad \left(\frac{1+\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}}\right)^k, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

2. Seien $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$, und es sei $P(z) = \sum_{k=0}^n a_k z^k$, für $z \in \mathbb{C}$. Zeigen Sie: falls $P(z_0) = 0$, dann ist auch $P(\overline{z_0}) = 0$, und umgekehrt.

   Hinweis: Zeigen Sie zunächst $\overline{z \cdot w} = \overline{z} \cdot \overline{w}$ und $\overline{z + w} = \overline{z} + \overline{w}$. Wenden Sie diese beiden Regeln immer wieder an.

3. Es seien OA_1B_1, OA_2B_2 und OA_3B_3 drei gleichseitige Dreiecke in der komplexen Zahlenebene, die den Ursprung O als Ecke gemeinsam haben. Die Dreiecke dürfen verschieden groß sein und sich auch überlappen. Jedes der 3 Dreiecke sei so orientiert, daß die Ecke bei B_j sich ergibt durch Drehung von A_j um O mit dem Winkel von 60°.

   Es sei M_1 der Mittelpunkt der Strecke B_1A_2, M_2 der Mittelpunkt der Strecke B_2A_3, und M_3 der Mittelpunkt der Strecke B_3A_1.

   Man zeige, daß das Dreieck $M_1M_2M_3$ auch gleichseitig ist.

   Hinweis: Multiplikation komplexer Zahlen

4. Es sei $z_1z_2z_3$ ein beliebiges Dreieck in der komplexen Zahlenebene. Auf jeder der drei Kanten dieses Dreiecks errichten wir nach „außen“ je ein Dreieck mit den Innenwinkeln 30°-30°-120°. Dabei sollen die 30°–Winkel jeweils an der Kante des Dreiecks $z_1z_2z_3$ anliegen.

   Die Eckpunkte an den 120°–Winkeln sollen w_1, w_2 und w_3 heißen. Zeigen Sie, daß das Dreieck $w_1w_2w_3$ gleichseitig ist. (Auch bekannt als Satz von Napoleon.)

   Hinweis: Multiplikation komplexer Zahlen

5. *Freiwillige Zusatzaufgabe*

   Es sei $z_0 \in \mathbb{C}$ gegeben, mit $|z_0| < 1$. Wir definieren eine Funktion

$$w = w(z) = \frac{z - z_0}{z\overline{z_0} - 1}, \quad z \in \mathbb{C}, \quad z\overline{z_0} \neq 1.$$

   Zeigen Sie: $|z| < 1 \iff |w(z)| < 1$. Was bewirkt die Abbildung $z \mapsto w(z)$ (geometrisch formuliert) ?

   Hinweis: Zeigen Sie zuerst $|z\overline{z_0} - 1|^2 - |z - z_0|^2 = (1 - |z|^2)(1 - |\overline{z_0}|^2)$. Das müßten Sie kennen.

Aufgaben zum Selberkorrigieren bzw. Gegenseitigkorrigieren

6. Man stelle folgende Zahlen in trigonometrischer Form und in kartesischer Form dar:

$$(1-\mathrm{i})^6,$$
$$e^{3\pi\mathrm{i}},$$
$$\left(2-\mathrm{i}\sqrt{3}\right)^3,$$
$$\left(\mathrm{i}-\sqrt{3}\right)^8,$$
$$\left(\sqrt{2-\sqrt{3}}+\mathrm{i}\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^3,$$
$$\left(\frac{3}{2}+\mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^6,$$
$$e^{3+\mathrm{i}\frac{\pi}{3}},$$
$$(1-\mathrm{i})^{13}.$$

Antworten:

$8(\cos\frac{\pi}{2}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{2}) = 8\mathrm{i}$, -1, $-10-9\sqrt{3}\mathrm{i} \approx 18.52(\cos 237.32^\circ + \mathrm{i}\sin 237.32^\circ)$, $-128+128\sqrt{3}\mathrm{i}$, $-4\sqrt{2}(1+\mathrm{i}) = 8(\cos\frac{5}{4}\pi + \mathrm{i}\sin\frac{5}{4}\pi)$, -27, $\frac{1}{2}e^3(1+\mathrm{i}\sqrt{3})$, $64(\mathrm{i}-1)$