Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
M. Dreher

02.11.2007

Übungen zur Mathematik für Physiker I, Blatt 3

Die Lösungen sind abzugeben am Freitag, 9.11.2007, vor Beginn der Vorlesung.

1. Gegeben sei im Raum die geometrische Figur eines quaderförmigen Tafelschwamms.
   (a) Wie viele Abbildungen (Drehungen, Spiegelungen und deren Nacheinanderausführungen) gibt es, die diese Figur auf sich abbilden ?
   (b) Geben Sie jeder solchen Abbildung eine Bezeichnung.
   (c) Stellen Sie die Verknüpfungstafel auf für die Gruppe dieser Abbildungen.

   Hinweis: Arbeit in Gruppen ratsam.

2. Wir bezeichnen mit $\mathbb{P}$ die Menge aller Matrizen der Gestalt
$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix},$$
   wobei a und b beliebige reelle Zahlen sind. Auf der Menge $\mathbb{P}$ sind eine Addition und eine Multiplikation so definiert, wie es für Matrizen üblich ist. Zeigen Sie:
   (a) Addition und Multiplikation führen aus $\mathbb{P}$ nicht heraus.
   (b) Für beide Operationen gelten Assoziativgesetze, Kommutativgesetze und das Distributivgesetz.
   (c) Für beide Operationen gibt es neutrale Elemente in $\mathbb{P}$.
   (d) Für jedes Element aus $\mathbb{P}$ gibt es ein additiv inverses Element, und für jedes Element (ungleich dem neutralen Element zur Addition) gibt es ein multiplikativ inverses Element.

   Erklären Sie die inhaltliche Bedeutung Ihres Tuns.

3. Im dreidimensionalen Raum seien 4 Punkte A, B, C und D in beliebiger Lage gegeben. Diese 4 Punkte sind die Ecken eines Vierecks (das meistens kein ebenes Viereck ist). Die Mittelpunkte der Strecken AB, BC, CD und DA sollen P, Q, R und S heißen.

   Man zeige, daß P, Q, R und S in einer Ebene liegen. Welche Eigenschaften haben diese 4 Punkte noch ?

4. Man beweise:
$$\forall a, b \in \mathbb{R} \quad \exists c, d \in \mathbb{R} \quad : \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad : \quad a \cos x + b \sin x = c \sin(x + d)$$
   Hinweis: Gesucht ist ein Rechenverfahren, wie man c und d ermitteln kann, wenn a und b gegeben sind. Dabei sollen c und d *so* beschaffen sein, daß die Gleichung $a \cos x + \ldots$ für sämtliche x gilt.

5. *Freiwillige Zusatzaufgabe*

   Man beweise Satz 1.43 aus der Vorlesung.

   Hinweise: Sei e *ein* linksneutrales Element. Sei a beliebig, a' *ein* linksinverses Element zu a, und a'' *ein* linksinverses Element zu a'. Dann ist also $a = e \circ a$. Man forme dies solange um, bis $a = a \circ e$ entsteht. Weil a beliebig war, ist e also auch rechtsneutral. Als nächstes zeige man, daß es nur ein einziges neutrales Element geben kann. Zeige als nächstes $a'' = a$, womit a' auch rechtsinvers zu a ist. Zeige die Eindeutigkeit des inversen Elements zu a zum Schluß.

Aufgaben zum Selberkorrigieren bzw. Gegenseitigkorrigieren

6. Wir betrachten die Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 4 & 0 & 3 \\ 5 & 1 & -4 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 5 & 1 & 0 \\ -3 & 2 & 4 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 0 & -1 \\ 5 & -3 \end{pmatrix}.$$

   Berechnen Sie die Produkte $(AB)C$, $A(BC)$, sowie die Ausdrücke $(AB)^T$ und $B^T A^T$.

7. Für die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} -4 & -3 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

   bestimme man die Matrix $A^3 - 18A = A \cdot A \cdot A - 18 \cdot A$.

   Antwort: 0