Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
M. Dreher

09.11.2007

Übungen zur Mathematik für Physiker I, Blatt 4

Die Lösungen sind abzugeben am Freitag, 16.11.2007, vor Beginn der Vorlesung.

1. (a) Bestimmen Sie die Koordinaten des Bildpunktes von $(2,2,2)^\top$ bei Drehung um die Achse durch den Ursprung mit Richtungsvektor $(2,0,1)^\top$ um den Winkel $30°$.
   (b) Bestimmen Sie die Koordinaten des Bildpunktes von $(3,3,3)^\top$ bei Drehung um die Achse durch die Punkte $(1,-1,3)^\top$, $(1,0,5)^\top$ um den Winkel $30°$.

2. Spiegelungen an Geraden durch den Ursprung im $\mathbb{R}^2$ und an Ebenen durch den Ursprung im $\mathbb{R}^3$ kann man durch quadratische Matrizen beschreiben, genauso wie Drehungen.
   (a) Gesucht ist die Abbildungsmatrix für die Spiegelung an der Gerade $x_1 + x_2 = 0$.
   (b) Welche Bewegung erhalten Sie, wenn Sie nach der Spiegelung aus (a) zusätzlich noch eine Spiegelung an der Gerade $x_2 = 0$ durchführen ? Was wäre die zugehörige Abbildungsmatrix ?
   (c) Gesucht ist die Abbildungsmatrix für die Spiegelung an der Ebene durch den Ursprung mit Normalenvektor $(2,2,2)^\top$.

3. Gegeben sei ein Dreieck in der Ebene mit Kanten a, b, c. Unter der Seitenhalbierenden s_a verstehen wir diejenige Strecke, die den Mittelpunkt der Seite a mit der gegenüberliegenden Ecke verbindet.

   Man gebe eine Formel an, wie man die Länge von s_a aus den Längen von a, b und c ermitteln kann. *Hinweis:* zurückblättern.

4. (a) Gegeben sei ein beliebiges Dreieck ABC. Auf jeder Kante errichten wir je einen Vektor senkrecht nach außen, dessen Länge proportional zu der Länge der jeweiligen Kante ist. Man bestimme die Summe dieser 3 Vektoren.

   Hinweis: Rechnen.

   (b) Gegeben sei ein Tetraeder $ABCD$, also eine dreiseitige Pyramide im Raum. Diese darf beliebig unregelmäßig sein. Auf jeder der 4 Flächen errichten wir je einen Vektor, der auf der jeweiligen Fläche senkrecht steht, nach außen zeigt, und dessen Länge proportional ist zum Flächeninhalt der zugehörigen Dreiecksfläche. Man bestimme die Summe dieser 4 Vektoren.

   Hinweis: Rechnen.

   (c) Gegeben sei ein schiefer Quader $ABCDEFGHIJKL$ mit der sechseckigen Grundfläche $ABCDEF$, die unregelmäßig sein kann. Auf jeder der 8 Flächen errichten wir senkrechte Vektoren wie in (b). Man bestimme die Summe dieser 8 Vektoren.

   Hinweis: Nicht rechnen.

5. *Freiwillige Zusatzaufgabe*

   Sei A eine Matrix vom Format 3×3. Zeigen Sie:

   Wenn $Ax = 0$ für jeden Vektor $x \in \mathbb{R}^3$, dann muß A die Nullmatrix sein.

Aufgabe zum Selberkorrigieren

6. Gegeben seien die Vektoren

$$a = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad c = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Man berechne:

(a) $\|a\|$, $\|b\|$, $\|c\|$,

(b) $\langle a, b\rangle$, $\langle b, c\rangle$, $\langle a, c\rangle$,

(c) $a \times c$, $b \times c$, $\langle a \times b, c\rangle$,

(d) $a \times (b \times c)$, $(a \times b) \times c$,

(e) das Spatprodukt $[a, b, c]$.

Lösungen:

(a) $\sqrt{6}$, $\sqrt{2}$, $\sqrt{2}$,

(b) 2, 0, 0,

(c) $(2, 2, 2)^T$, $(0, 2, 0)^T$, -4,

(d) $(-2, 0, 2)^T$, $(0, 0, 0)^T$,

(e) -4.