Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
M. Dreher

16.11.2007

Übungen zur Mathematik für Physiker I, Blatt 5

Die Lösungen sind abzugeben am Freitag, 23.11.2007, vor Beginn der Vorlesung.

1. Man untersuche, ob die Menge $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen einen Vektorraum über dem Körper $\mathbb{Q}$ der rationalen Zahlen bildet. Falls ja, ermittle man seine Dimension.

2. Seien A, B, C beliebige Mengen. Beweisen Sie folgende Distributivgesetze:

$$\begin{aligned} A \times (B \cap C) &= (A \times B) \cap (A \times C), \\ A \times (B \cup C) &= (A \times B) \cup (A \times C), \\ A \cap (B \cup C) &= (A \cap B) \cup (A \cap C), \\ A \cup (B \cap C) &= (A \cup B) \cap (A \cup C). \end{aligned}$$

3. Sei n eine positive ganze Zahl. Beweisen Sie mittels vollständiger Induktion, daß die Funktion $x \mapsto \cos(n \arccos x)$ ein Polynom in x vom Grade n ist, mit höchstem Koeffizienten 2^{n-1}. Was ist der Definitionsbereich dieser Funktion ? Geben Sie die Nullstellen dieser Funktion an, und machen Sie eine Skizze der Lage der Nullstellen für große n.

4. (a) Welche der folgenden Mengen von Vektoren des $\mathbb{R}^4$ sind linear abhängig ?

$$\{(1,0,0,0),(2,1,0,0),(0,0,0,0)\}, \tag{1}$$
$$\{(23,45,50,1),(21,31,189,4),(17,1,0,0)\}. \tag{2}$$

   (b) Zeigen Sie, daß die Vektoren

$$u_1 = \begin{pmatrix} 2-\mathrm{i} \\ 1-\mathrm{i} \end{pmatrix}, \qquad u_2 = \begin{pmatrix} -1-\mathrm{i} \\ -4-3\mathrm{i} \end{pmatrix}$$

   ein Erzeugendensystem des $\mathbb{C}$–Vektorraumes $\mathbb{C}^2$ bilden.

5. *Freiwillige Zusatzaufgabe*

   Beweisen Sie mit vollständiger Induktion, daß

$$1 + q + q^2 + \cdots + q^n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q},$$

   für jedes $q \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$.

Aufgabe zum Selberkorrigieren

6. Zeigen Sie, daß

$$\sum_{k=0}^{n}(2k+2)^2 = \frac{2(n+1)}{3}(n+2)(2n+3), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Hinweis: Stolperfallentext beachten.