Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
M. Dreher

23.11.2007

Übungen zur Mathematik für Physiker I, Blatt 6

Die Lösungen sind abzugeben am Freitag, 30.11.2007, vor Beginn der Vorlesung.

1. Sei $n \in \mathbb{N}_+$. Zeigen Sie (z.B. mittels vollständiger Induktion), daß Polynome P_n und Q_n existieren, so daß für jedes $x \in \mathbb{R}$ gilt:
$$\cos(nx) = P_n(\cos(x)), \qquad \sin(nx) = \sin(x) Q_n(\cos(x)).$$

2. Sei $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ eine symmetrische Matrix, also $A^\top = A$. Wir definieren eine Abbildung
$$\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$
gemäß $\langle u, v\rangle = (u_1, u_2) A \binom{v_1}{v_2}$, wobei $u, v \in \mathbb{R}^2$. Zeigen Sie:
   - diese Abbildung ist $\mathbb{R}$-linear im ersten Faktor und $\mathbb{R}$-linear im zweiten Faktor (man sagt auch bilinear)
   - diese Abbildung ist symmetrisch (also $\langle u, v\rangle = \langle v, u\rangle$). *Hinweis:* Lesen Sie u und v als Matrizen vom Format 1×2 oder 2×1 und erinnern Sie sich, wie man Produkte von Matrizen transponiert.

   Untersuchen Sie, ob sich ein Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^2$ ergibt, wenn
$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{bzw.} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$
   Hinweis: Wenn Sie die beiden obigen • abgearbeitet haben, haben Sie bloß noch zu zeigen, daß die Abbildung positiv definit ist.

3. Sei $A \in \mathbb{C}^{2\times 2}$ eine hermitesche Matrix, also $\overline{A^\top} = A$. Wir definieren eine Abbildung
$$\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}$$
gemäß $\langle u, v\rangle = (u_1, u_2) A \overline{\binom{v_1}{v_2}}$, wobei $u, v \in \mathbb{C}^2$. Zeigen Sie:
   - diese Abbildung ist $\mathbb{C}$-linear im ersten Faktor und $\mathbb{C}$-antilinear im zweiten Faktor (man sagt auch sesquilinear)
   - diese Abbildung ist schief-symmetrisch (also $\langle u, v\rangle = \overline{\langle v, u\rangle}$)

   Untersuchen Sie, ob sich ein Skalarprodukt auf $\mathbb{C}^2$ ergibt, wenn
$$A = \begin{pmatrix} 2 & \mathrm{i} \\ -\mathrm{i} & 2 \end{pmatrix}.$$
   Hinweis: Wenn Sie die beiden obigen • abgearbeitet haben, haben Sie bloß noch zu zeigen, daß die Abbildung positiv definit ist.

4. *Freiwillige Zusatzaufgabe*
   (a) Zeigen Sie (z.B. mittels vollständiger Induktion) für $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$, daß
$$\frac{1}{n+1} \leq \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \ldots \cdot \frac{2n-1}{2n} \leq \frac{1}{\sqrt{3n+1}}.$$
   (b) Zeigen Sie (mittels (a)) für jedes $n \in \mathbb{N}$, daß für gewisse Binomialkoeffizienten folgende Näherungsformel gilt:
$$\frac{4^n}{n+1} \leq \binom{2n}{n} \leq \frac{4^n}{\sqrt{3n+1}}.$$

Aufgabe zum Gegenseitigkorrigieren

5. Wenden Sie das Gram–Schmidt–Verfahren auf die Vektoren $f_1 = (2,1,0,3)^\top$, $f_2 = (0,1,0,4)^\top$, $f_3 = (1,1,1,1)^\top$ des $\mathbb{R}^4$ an.