Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
M. Dreher

30.11.2007

Übungen zur Mathematik für Physiker I, Blatt 7

Die Lösungen sind abzugeben am Freitag, 07.12.2007, vor Beginn der Vorlesung.

1. Es sei $R \subset \mathbb{R}^4$ derjenige dreidimensionale affine Raum, der durch die Punkte $(4,0,0,0)^\top$, $(0,3,0,0)^\top$, $(0,0,2,0)^\top$ und $(0,0,0,1)^\top$ verläuft. Wie weit ist R vom Ursprung des $\mathbb{R}^4$ entfernt ? Benutzen Sie dabei die Methoden zu Approximationsproblemen aus dem Skript (also keine Hesse-Normalform).

2. (a) Zeigen Sie, daß die Abbildung $\langle \cdot, \cdot \rangle$ aus Beispiel 2.34 des Skripts tatsächlich ein Skalarprodukt auf dem angegebenen Vektorraum ist.

   Hinweis: das heißt, daß man die 4 • aus Definition 2.23 zu zeigen hat

   (b) Sei $V = C([0, 2\pi]; \mathbb{R})$ der Raum der auf dem Intervall $[0, 2\pi]$ stetigen reellwertigen Funktionen. Für V definieren wir ein Skalarprodukt sinngemaß wie in Beispiel 2.34. Man zeige, daß die Funktionen $x \mapsto \cos(nx)$ und $x \mapsto \cos(mx)$ im Sinne dieses Skalarproduktes senkrecht aufeinander stehen, wenn $n, m \in \mathbb{N}$ mit $n \neq m$.

   Hinweis: Additionstheoreme.

   Damit zeige man dann auf logisch saubere Weise, daß $\dim V = \infty$.

   Hinweis: benutzen Sie Aussagen aus dem Skript. Geben Sie diese verwendeten Aussagen an.

3. Man beweise (z.B. mit vollständiger Induktion), daß für jedes $n \in \mathbb{N}_+$ gilt:

$$2\sqrt{n+1} - 2 \leq \sum_{\nu=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{\nu}} \leq 2\sqrt{n} - 1.$$

   Wie verhält sich die Summe in der Mitte für wachsendes n ?

   Hinweis: evtl. 3. binomische Formel.

4. Beweisen Sie folgende Aussage: wenn $f\colon [0,2] \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar ist mit $f(0) = f(2) = 0$, dann ist

$$\max_{x \in [0,2]} |f(x)| \leq \left(\int_{t=0}^{t=2} |f'(t)|^2 \, \mathrm{d}t \right)^{1/2}.$$

   Hinweis: Cauchy–Schwarz

5. *Freiwillige Zusatzaufgabe*

   Sei C eine reelle oder komplexe Matrix vom Format $n \times n$. Man beweise:

   Wenn $x^\top C x = 0$ für jedes $x \in \mathbb{R}^n$, dann ist $C^\top = -C$.

Aufgabe zum Gegenseitigkorrigieren

6. (a) Man löse das Gleichungssystem $Ax = b$, mit

$$A = \begin{pmatrix} 2+\mathrm{i} & 1 \\ 1-\mathrm{i} & 1+\mathrm{i} \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} 1-\mathrm{i} \\ 1+\mathrm{i} \end{pmatrix}.$$

(b) Im Vektorraum $\mathbb{C}^3$ über dem Körper $K = \mathbb{C}$ sei der Vektor $b_1 = (1, \mathrm{i}, 2-\mathrm{i})^T$ gegeben. Man ermittle Vektoren $b_2 \neq 0$ und $b_3 \neq 0$, sodaß (b_1, b_2, b_3) ein Orthogonalsystem bilden.

Hinweis: Gram-Schmidt-Verfahren. Aufpassen mit dem Konjugieren eines Faktors des Skalarprodukts.