Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
M. Dreher

07.12.2007

Übungen zur Mathematik für Physiker I, Blatt 8

Die Lösungen sind abzugeben am Freitag, 14.12.2007, vor Beginn der Vorlesung.

1. **(LU–Zerlegung)** Gegeben ist die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 0 \\ -1 & -2 & 3 \\ 3 & 7 & -1 \end{pmatrix}.$$

   (a) Man bringe A auf Dreiecksform (das heißt: unterhalb der Diagonalen ausräumen, aber nicht oberhalb; und die Diagonaleneinträge auch nicht auf 1 normieren).

   (b) Man finde Matrizen B und C der Gestalt

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ b_{21} & 1 & 0 \\ b_{31} & b_{32} & 1 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ 0 & c_{22} & c_{23} \\ 0 & 0 & c_{33} \end{pmatrix},$$

   für die $A = BC$ gilt.

   (c) Wo finden Sie die Einträge b_{ij} aus (b) in (a) wieder ?

   (d) Wenn eine solche Zerlegung $A = BC$ bekannt ist — wie kann man dann Gleichungssysteme der Form $Ax = b$ ganz einfach lösen ?

2. Gegeben sei eine Matrix A vom Typ 5×5. Gesucht ist eine Matrix P, so daß das Produkt PA dieselben Zeilen wie A enthält, aber in der Reihenfolge $(3, 2, 5, 4, 1)$.

3. Man bestimme die Kerne der Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 7 & -6 \\ 2 & 1 & 5 & -1 \\ 1 & 0 & -4 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & -2 \\ -3 & -2 & 3 \end{pmatrix}.$$

4. Für jede der folgenden Funktionen $f\colon X \to Y$ bestimme man den Wertebereich W_f und gebe an, ob sie injektiv, surjektiv, bijektiv ist.

   (a) $X = [-2, +\infty)$, $Y = \mathbb{R}$, $f(x) = (x+1)^2$,

   (b) $X = [2, +\infty)$, $Y = \mathbb{R}$, $f(x) = (x+1)^2$,

   (c) $X = [0, 1]$, $Y = [0, 1]$, $f(x) = (x-1)^2$,

   (d) $X = \mathbb{Z}$, $Y = \mathbb{Z}$, $f(x) = x^4$.

   Man bestimme die Umkehrfunktionen aller injektiven Funktionen (inklusive der Angabe ihres Definitionsbereichs).

5. *Freiwillige Zusatzaufgabe*

(a) **(Zum Warmwerden)**
Sei $A = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$ der übliche Differentialoperator, und es seien $U = C^1([0,1];\mathbb{R})$, $V = C([0,1];\mathbb{R})$ die üblichen Funktionenräume. Bestimmen Sie den Kern von $A\colon U \to V$, und erraten Sie den Kern des Operators $A - 3\colon U \to V$. Hierbei definieren wir $(A-3)u := u' - 3u$ für $u \in U$. **Anmerkung:** Eigentlich müßte man $A - 3\mathrm{id}_U$ anstelle von $A - 3$ schreiben.

(b) **(Elliptische Randwertprobleme für Einsteiger)**
Nun betrachten wir den Operator $A^2 = \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}$. Der Raum V sei wie oben, und für U wählen wir jeweils

$$
\begin{aligned}
&U = C^2([0,1];\mathbb{R}),\\
&U = \{u \in C^2([0,1];\mathbb{R}) \text{ mit } u(0) = u(1) = 0\},\\
&U = \{u \in C^2([0,1];\mathbb{R}) \text{ mit } u'(0) = u'(1) = 0\}.
\end{aligned}
$$

Gesucht ist in jedem der drei Fälle der Kern von $A^2\colon U \to V$.

Anmerkung: In der Elektrostatik wird dann aus dem Intervall $[0,1]$ ein Gebiet im $\mathbb{R}^3$, und $A^2 = \triangle$.

Aufgabe zum Selberkorrigieren

Man ermittle die Lösung X zu $AX = B$, wobei

$$
A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & -2 & 3 \\ -1 & 2 & 2 & -4 \\ 0 & 1 & 2 & -5 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \\ 3 & -1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}.
$$

Lösung:

$$
X = \begin{pmatrix} -1 & 7 \\ 2 & -2 \\ -9 & 17 \\ -4 & 16 \end{pmatrix}.
$$