Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
M. Dreher

14.12.2007

Übungen zur Mathematik für Physiker I, Blatt 9

Die Lösungen sind abzugeben am Freitag, 21.12.2007, vor Beginn der Vorlesung.

1. Für das untige Gleichungssystem bestimme man den Rang der Koeffizientenmatrix A und den Rang der erweiterten Koeffizientenmatrix $(A|b)$. Daraus urteile man über die Lösbarkeit des Gleichungssystems. Wieviele (geeignet zu selektierende) Unbekannte können frei gewählt werden ?

$$\begin{aligned} 6x_1 + 4x_2 + 17x_3 + 8x_4 &= -20, \\ 3x_1 + 2x_2 + 7x_3 + 7x_4 &= -4, \\ 3x_1 + 2x_2 + 8x_3 + 5x_4 &= -8, \\ -x_3 + 2x_4 &= 4. \end{aligned}$$

2. **(Fredholmsche Alternative ganz einfach)**

   Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times m}$ eine beliebige Matrix, und seien $\langle\cdot,\cdot\rangle_n$ sowie $\langle\cdot,\cdot\rangle_m$ die üblichen Skalarprodukte im $\mathbb{R}^n$ bzw. im $\mathbb{R}^m$.

   (a) Beweisen Sie: wenn $x \in \mathbb{R}^m$ eine Lösung für das System $Ax = b$ mit $b \in \mathbb{R}^n$ ist, dann ist $\left\langle A^\top y, x\right\rangle_m = \langle y, b\rangle_n$ für jeden Vektor $y \in \mathbb{R}^n$.

   (b) Beweisen Sie damit: $\ker A^\top \perp \operatorname{img} A$ und $\ker A \perp \operatorname{img} A^\top$.

   (c) Beweisen Sie damit: $\mathbb{R}^m = \ker A \oplus \operatorname{img} A^\top$ und $\mathbb{R}^n = \ker A^\top \oplus \operatorname{img} A$.

   (d) Beweisen Sie die und erquicken Sie sich an der Alternative von Fredholm:
   Das System $Ax = b$ ist lösbar genau dann, wenn $b \perp \ker A^\top$.

   (e) Was bedeutet das für $n = m$ und reguläre (also invertierbare) Matrix A ?

   Hinweis: Dimensionsformel**n**.

   Anmerkung: Die F.A. gilt auch bei diversen Abbildungen $A\colon U \to V$ mit (fast) beliebigen Vektorräumen U, V, die ein Skalarprodukt besitzen.

3. **(Zukünftig das tägliche Brot . . .)**

   Man bestimme die Lösung $y = y(x)$ des Anfangswertproblems

$$y''(x) + 16y(x) = \sin(2x), \qquad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1.$$

   Um eine spezielle Lösung des inhomogenen Problems zu bestimmen, probiere man mit einer Funktion $y^* = y^*(x)$, die so ähnlich aussieht wie die rechte Seite.

4. Beweisen Sie $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$ für $n, k \in \mathbb{N}$, $0 \le k \le n$.

5. *Freiwillige Zusatzaufgabe*

   Gegeben sei das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 + x_3 &= 0, \\ -2\lambda x_1 + 9x_2 + \lambda x_3 &= 6, \\ 2x_1 + \lambda x_2 + 2x_3 &= 1. \end{aligned}$$

   (a) Für welche Werte $\lambda \in \mathbb{R}$ ist das Gleichungssystem eindeutig lösbar ?

   (b) Für welche Werte $\lambda \in \mathbb{R}$ existieren unendlich viele Lösungen ?

   (c) Für welche Werte $\lambda \in \mathbb{R}$ existieren keine Lösungen ?

Aufgabe zum Selberkorrigieren

6. Die folgenden Vektoren erzeugen einen Unterraum des $\mathbb{R}^5$. Man bestimme dessen Dimension.
$$(1,1,0,2,1)^T, (2,1,0,0,3)^T, (1,0,2,2,1)^T.$$

Antwort: 3

7. Gegeben sind die Ebenen $E_1\colon x-y+z=0$, $E_2\colon 3x-y-z+2=0$, $E_3\colon 4x-y-2z+\lambda=0$.
   (a) Man bestimme (falls möglich), die Zahl λ so, daß sich diese 3 Ebenen in einer gemeinsamen Geraden schneiden.
   (b) Man gebe eine Parameterdarstellung dieser Geraden an.

Antwort: $\lambda = 3$ und $(x,y,z)^T = (0,1,1)^T + t(1,2,1)^T$, $-\infty < t < \infty$.