

Übungen zur Mathematik für Physiker I, Blatt 10

Die Lösungen sind abzugeben am Freitag, 11.01.2008, vor Beginn der Vorlesung.

1. Sei K ein beliebiger Körper (nicht unbedingt \mathbb{R} oder \mathbb{C}). Man beweise die binomische Formel für beliebige Elemente $x, y \in K$:

$$(x + y)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k y^{n-k}, \quad n \in \mathbb{N}_0.$$

Hinweis: Blatt 9 und Induktion.

2. Sei $U = \mathbb{R}^n$ der übliche Vektorraum mit Norm $\|\cdot\|_U$, und sei $M \subset U$ eine Teilmenge.
 - (a) Beweisen Sie den Satz aus der Vorlesung: M ist offen in U genau dann, wenn die Komplementärmenge $U \setminus M$ abgeschlossen in U ist.
 - (b) Finden Sie alle Mengen $M \subset U$, die gleichzeitig offen und abgeschlossen sind. Begründen Sie, daß Sie wirklich alle solchen Mengen M entdeckt haben, und daß es keine weiteren gibt.
3. Zu den beiden folgenden Matrizen bestimme man den Rang, die Dimensionen von Kern und Bild, und man gebe je eine Basis für Kern bzw. Bild an:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & -3 \\ 1 & 4 & -1 & 2 \\ -3 & 4 & -3 & 8 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & -3 & -2 \\ 4 & 7 & 1 \end{pmatrix}.$$

4. (a) Man zeige $\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \cdots + \binom{n}{n} = 2^n$ für $n \in \mathbb{N}_0$.
(b) Zeigen Sie $(1+x)^n \geq 1+nx$ für $x \in \mathbb{R}$, $x \geq -1$ und $n \in \mathbb{N}_0$.

5. *Freiwillige Zusatzaufgabe*

Im n -Advent-Land (n sei eine natürliche Zahl) dauert die Adventszeit n Wochen. Auch dort ist es üblich, daß zum 1. Advent eine von n Kerzen für eine Brenndauer von D Stunden angezündet wird, zum 2. Advent zwei Kerzen angezündet werden und so weiter bis zum n -ten Advent, wenn alle n Kerzen angezündet werden. Wir nehmen an, daß die Brenndauer bei jedem Advent für jede Kerze gleichlang ist, und daß die Abbrenngeschwindigkeiten immer gleich sind, so daß nach jedem Anzünden eine gleiche Höhe (und diese ist positiv) abbrennt. Zum Beginn sind alle Kerzen gleichlang. Für welche n kann man für die Kerzen ein Anzündschema so finden, daß nach dem n -ten Advent alle Kerzen rückstandsfrei verbrannt sind?

Die Klausur ist am 22.02.08, von 14-16 Uhr im R611 und R513.

