Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
M. Dreher

18.01.2008

Übungen zur Mathematik für Physiker I, Blatt 12

Die Lösungen sind abzugeben am Freitag, 25.01.2008, vor Beginn der Vorlesung.

1. Für welche $z \in \mathbb{C}$ bzw. $x \in \mathbb{R}$ konvergieren die folgenden Reihen:

$$f_1(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k^k}{k!} z^k, \qquad f_2(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-x)^k}{k}, \qquad f_3(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\cdot\dots\cdot(\alpha-n+1)}{n!} z^n \qquad (\alpha \in \mathbb{C}),$$

$$f_4(z) = \sum_{k=0}^{\infty} (k!)^2 z^k, \qquad f_5(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\cos(kx)}{2^k}.$$

2. Wir definieren zwei Funktionen

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}, \qquad g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{(2n)!}.$$

   (a) Für welche $z \in \mathbb{C}$ konvergieren diese Reihen ?

   (b) Man bestimme $(g(z))^2 - (f(z))^2$ mit Hilfe der Cauchy–Produktreihe.
   Hinweis: Es reicht, wenn Sie sich von der Reihe zu $g^2 - f^2$ zuerst die Potenzen $z^0, \dots, z^8$ anschauen. Suchen Sie dann eine Formel so ähnlich wie in Aufgabe 4a auf Blatt 10; denken Sie dabei auch an Aufgabe 1 auf Blatt 10.

   (c) Was hat das alles zu bedeuten ?

3. Beweisen Sie sauber die Aussage in Beispiel 5.54.
   Hinweis: eine Aussage der Gestalt „Exponentialfolgen sind stärker als Potenzfolgen“ wäre heute zu unsauber.

4. Für eine beschränkte Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ reeller Zahlen bezeichnen wir mit

$$\liminf_{n\to\infty} x_n, \qquad \limsup_{n\to\infty} x_n$$

   den kleinsten bzw. größten Häufungspunkt dieser Folge (gesprochen: limes inferior bzw. limes superior).

   Finden Sie zwei beschränkte Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ reeller Zahlen mit

$$\left(\liminf_{n\to\infty} a_n\right) + \left(\liminf_{n\to\infty} b_n\right) < \liminf_{n\to\infty}(a_n+b_n) < \limsup_{n\to\infty}(a_n+b_n) < \left(\limsup_{n\to\infty} a_n\right) + \left(\limsup_{n\to\infty} b_n\right).$$

   Moral: Die Addition reeller Zahlen ist mysteriöser als man glaubt. Es ist eben nicht zulässig, das + am $\liminf$ vorbeizuziehen.

5. *Freiwillige Zusatzaufgabe*
   Untersuchen Sie die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2+(-1)^n}{2^{n-1}}$ auf Konvergenz mittels Quotientenkriterium, und mittels Wurzelkriterium. Welches der beiden Kriterien ist aussagekräftiger ?

Die Klausur wird am 22.02.08 stattfinden, von 14-16 Uhr im R611 und R513.

Aufgabe zum Selberkorrigieren

6. Man bestimme den Entwicklungspunkt und Konvergenzradius der Potenzreihen

$$\sum_{k=1}^{\infty}(k3^k)^{-1}(2z-1)^{3k+2}, \quad \sum_{k=1}^{\infty}\frac{k^2}{k!}z^{5k}, \quad \sum_{k=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{k}\right)^{k^2}(ez+\pi)^k.$$

Lösung: $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}3^{1/3})$, $(0, \infty)$, $(-\frac{\pi}{e}, e^{-2})$.