

## Übungen zur Mathematik für Physiker I, Blatt 13

Die Lösungen sind abzugeben am Freitag, 01.02.2008, vor Beginn der Vorlesung.

1. Man finde auf  $\mathbb{R}$  stetige Funktionen  $f = f(x)$ ,  $g = g(x)$  mit  $f(0) = g(0) = 0$  und  $f(x)g(x) = x$  für alle  $x \in \mathbb{R}$ .

Gibt es auch differenzierbare Funktionen mit diesen Eigenschaften ?

2. Finden Sie zwei auf  $[0, 1]$  definierte Funktionen  $f$  und  $g$ , die in jedem Punkt des Intervalles  $[0, 1]$  unstetig sind, so daß  $f + g$ ,  $f \cdot g$  und  $f/g$  auf  $[0, 1]$  stetig sind.

Können Sie auch noch dafür sorgen, daß zusätzlich  $f - g$  überall stetig ist ?

3. Bestimmen Sie die einseitigen Grenzwerte

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \left( 2 + x \left( 1 + \frac{4}{x^2} \right)^{1/2} \right), \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} \left( 2 + x \left( 1 + \frac{4}{x^2} \right)^{1/2} \right).$$

4. (a) Man finde eine stetige Funktion von  $\mathbb{R}$  nach  $\mathbb{R}$ , bei der das Bild einer offenen Menge nicht unbedingt wieder eine offene Menge ist.  
(b) Man finde eine stetige Funktion von  $\mathbb{R}$  nach  $\mathbb{R}$ , bei der das Bild einer abgeschlossenen Menge nicht unbedingt wieder eine abgeschlossene Menge ist.  
(c) Man finde eine stetige Funktion von  $\mathbb{C}$  nach  $\mathbb{C}$ , für die die Behauptung des Zwischenwertsatzes nicht gilt.

5. *Freiwillige Zusatzaufgabe*

- (a) Sei  $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  stetig, und  $f(0) = f(1)$ . Zeigen Sie, daß es ein  $c \in [0, 1/2]$  gibt so daß  $f(c) = f(c + 1/2)$ .  
(b) Man untersuche, ob es eine auf  $[0, 1]$  stetige Funktion gibt, die jeden Funktionswert genau 8 mal annimmt.

*Die Klausur wird am 22.02.08 stattfinden, von 14-16 Uhr im R611 und R513.*

## Aufgabe zum Selberkorrigieren

6. Man differenziere nach  $x$ :

$$\frac{e^{2x} ((4 - 20x) \cos(4x) + (3 + 10x) \sin(4x))}{100},$$
$$\frac{-\left(\sqrt{1-x^2} (2+x^2)\right)}{3},$$
$$x^x,$$
$$-x + x \ln x$$

Antworten:

$$xe^{2x} \sin(4x),$$
$$\frac{x^3}{\sqrt{1-x^2}},$$
$$x^x(1 + \ln x),$$
$$\ln x.$$