Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
M. Dreher

01.02.2008

Übungen zur Mathematik für Physiker I, Blatt 14

Die Lösungen sind abzugeben am Freitag, 08.02.2008, vor Beginn der Vorlesung.

1. Beweisen Sie folgende Identitäten:

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e\left(1-\frac{1}{2n}+\frac{11}{24n^2}+o(n^{-2})\right), \qquad n\to\infty,$$
$$\sqrt[n]{n} = 1+\frac{\ln n}{n}+\frac{1}{2}\left(\frac{\ln n}{n}\right)^2+o(n^{-2}), \qquad n\to\infty.$$

Hierbei steht o für das Landausymbol.

Hinweis: Taylorsatz für Logarithmus und Exp.

2. Untersuchen Sie mittels der Regel von Bernoulli–L'Hospital die folgenden Grenzwerte:
   (a) $\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{\ln(x)}\right)$,
   (b) $\lim_{x\to\pi/2}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\tan(x)$.

3. Sei die Funktion $f = f(x)$ auf dem Intervall $[a,b]$ stetig differenzierbar, und sei überall $|f(x)|+|f'(x)|\neq 0$. Beweisen Sie, daß f im Intervall $[a,b]$ nicht unendlich viele Nullstellen haben kann.

4. Finden Sie alle stetigen Funktionen $f = f(x)\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$, für die gilt: $f(x+y)=f(x)+f(y)$, $f(xy)=f(x)f(y)$. Zeigen Sie, daß Sie wirklich *alle* solchen f gefunden haben.

   Erläuterung: Es geht nicht darum, ein solches f zu erraten — das wäre leicht. Sondern es geht darum, zu untersuchen, ob es noch ein zweites solches f geben kann.

5. *Freiwillige Zusatzaufgabe*

   (a) Zeigen Sie folgende Rechenregel für die n-te Ableitung des Produktes zweier Funktionen f und g:
   $$(f\cdot g)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} f^{(k)}g^{(n-k)}.$$
   (b) Die stetige Funktion $f = f(x)$ sei auf dem Intervall $[a,b]$ definiert, mit $a\le f(x)\le b$ für jedes $x\in[a,b]$. Zeigen Sie, daß f einen Fixpunkt in $[a,b]$ hat. Das heißt, daß wir einen Punkt $x_0\in[a,b]$ suchen mit $f(x_0)=x_0$.

Eine Großübung gibt es am 5.02.08 ab 18:00 Uhr im R511.

Die Klausur wird am 22.02.08 stattfinden, von 14:00-16:00 Uhr im R611 und R513.

Aufgabe zum Selberknobeln

6. Sei die stetige Funktion f definiert auf dem Intervall $[a-1, a+1]$, differenzierbar im Punkt a, und sei $f(a) \neq 0$. Zeigen Sie, daß

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{f(a+\frac{1}{n})}{f(a)} \right)^n = \exp\left(\frac{f'(a)}{f(a)} \right).$$