Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
M. Dreher 12.02.2008

Übungen zur Mathematik für Physiker I, Semesterendblatt

1. Unter dem unendlichen Ausdruck
$$\sqrt{a+\sqrt{a+\sqrt{a+\sqrt{a+\ldots}}}}, \qquad a>0,$$
verstehen wir den Grenzwert der Folge a_n, wobei $a_1 = \sqrt{a}$, $a_2 = \sqrt{a+\sqrt{a}}$, $a_3 = \sqrt{a+\sqrt{a+\sqrt{a}}}$, usw.
   (a) Ermittle eine Rekursionsformel für die a_n!
   (b) Ermittle daraus eine Vermutung für den Grenzwert g, falls es den Grenzwert überhaupt gibt.
   (c) Zeige per Induktion $a_n < g$.
   (d) Benutze dies, um die Monotonie der Folge (a_n) zu zeigen

2. Sei die Funktion $f = f(x)$ definiert auf (a,b), $x_0 \in (a,b)$, und sei f im Punkt x_0 differenzierbar. Zeige, daß der Grenzwert
$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0-h)}{2h} \tag{1}$$
existiert, und berechne diesen Grenzwert.

3. Sei die Funktion $f = f(x)$ definiert auf (a,b) und $x_0 \in (a,b)$. Wir setzen voraus, daß der Grenzwert (1) existiert. Ist dann f im Punkt x_0 differenzierbar ? (Beweis oder Gegenbeispiel)

4. Sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine stetig differenzierbare Funktion, und sei $0 \le f'(x) \le f(x)$ für jedes $x \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie: wenn $f(x_0) = 0$ für ein $x_0 \in \mathbb{R}$, dann ist $f(x) = 0$ für *jedes* $x \in \mathbb{R}$.

   Hinweis: $g(x) = e^{-x} f(x)$.

5. Untersuchen Sie mittels der Regel von Bernoulli–L'Hospital die folgenden Grenzwerte:
   (a) $\lim_{x\to\infty} \frac{x+\sin(x)}{x}$,
   (b) $\lim_{x\to\infty} \frac{a^x}{b^x}$,
   (c) $\lim_{x\to\infty} \frac{x-\sin(x)}{x+\sin(x)}$,
   (d) $\lim_{x\to 0} \frac{x^2 \sin\left(\frac{1}{x^2}\right)}{x}$.

6. Sei $f = f(x)$ stetig differenzierbar im Intervall $[a,b]$, und sei $f(a) = f(b) = 0$. Zeigen Sie, daß die Funktion $u(x) = f'(x) + x^3 f(x)$ eine Nullstelle im Intervall (a,b) hat.

   Hinweis: Man untersuche $\varphi(x) = e^{g(x)} f(x)$, wobei $g = g(x)$ passend zu wählen ist.