

Übungen zur Mathematik für Physiker I, Blatt 1

Die Lösungen sind abzugeben am Freitag, 31.10.2008, VOR Beginn der Vorlesung.

1. Seien $p, q \in \mathbb{R}$, die Zahl $D = \frac{p^3}{27} + \frac{q^2}{4}$ sei positiv, und sei $w = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{D}}$, wobei der Radikand als nichtnegativ vorausgesetzt wird. Man zeige, daß $x := w - \frac{p}{3w}$ eine Lösung der kubischen Gleichung $x^3 + px + q = 0$ ist.

Arbeiten Sie ökonomisch. Mit Riesenaufwand kann's ja jeder.

Gegeben sei eine kubische Gleichung $y^3 + ay^2 + by + c = 0$ mit reellen a, b, c und gesuchtem y . Wie kann man diese Gleichung transformieren auf eine kubische Gleichung der Gestalt $x^3 + px + q = 0$, also ohne quadratischen Term ?

2. (a) Man zeige durch Nachrechnen, daß für alle komplexen Zahlen r, w, z die folgenden Beziehungen gelten:

$$(r \cdot w) \cdot z = r \cdot (w \cdot z),$$
$$|r \cdot w| = |r| \cdot |w|.$$

- (b) Zeigen Sie anschließend die Dreiecksungleichung $|z + w| \leq |z| + |w|$, sowie die „Dreiecksungleichung nach unten“:

$$|z - w| \geq \left| |z| - |w| \right|.$$

Arbeiten Sie ökonomisch.

3. Zeigen Sie: egal wie man es auch versucht, es wird nie gelingen, auf \mathbb{C} eine Ordnungsrelation \leq einzuführen, die sich mit den Rechenoperationen $+$ und \cdot auf \mathbb{C} verträgt.

Im Sinne von: wenn $a \leq b$, dann $a + c \leq b + c$. Und wenn $0 \leq c$ sowie $a \leq b$, dann $ac \leq bc$. Das Ganze soll gelten für alle $a, b, c \in \mathbb{C}$.

4. Es seien $z, w \in \mathbb{C}$. Beweisen Sie die sogenannte *Parallelogrammgleichung* und zeichnen Sie eine Skizze:

$$|z + w|^2 + |z - w|^2 = 2(|z|^2 + |w|^2).$$

5. *Freiwillige Zusatzaufgabe*

Beweisen Sie, daß für beliebige komplexe Zahlen z und w gilt:

$$|1 - z\bar{w}|^2 - |z - w|^2 = (1 - |z|^2)(1 - |w|^2).$$

Hinweis zu den Aufgaben 2(b), 4 und 5: Es ist am besten, wenn Sie bei diesen Aufgaben die komplexen Zahlen als solche verwenden, und nicht alles nach Real- und Imaginärteil aufröseln. Die Relation $r \cdot \bar{r} = |r|^2$ für $r \in \mathbb{C}$ könnte zum Beispiel nützlich sein.

Aufgaben zum Selberkorrigieren bzw. Gegenseitigkorrigieren

6. Stellen Sie die folgenden komplexen Zahlen in der Form $a + bi$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ dar:

$$(2 + 3i)(1 - i), \quad (-i)^2, \quad \frac{i}{2i-1}, \quad \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^3, \quad \left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^3.$$

Antwort: $5 + i$, -1 , $\frac{2}{5} - \frac{1}{5}i$, 1 , 1 .

7. Vervollständigen Sie die Gleichungen nach dem Schema „kartesische Form“=„Polarkoordinatenform“:

$$\begin{aligned} i &= 1 \cdot \left(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} \right), \\ 1 + i &= \\ -3 + 3i &= \\ &= 2 \cdot (\cos 5\pi + i \sin 5\pi) \\ -1 - \sqrt{3}i &= \\ &= 2 \cdot (\cos(-\pi) + i \sin(-\pi)) \end{aligned}$$

8. Stellen Sie in der Form $a + bi$ dar (ohne Taschenrechner):

$$\frac{(1 + 2i)^2}{2 + 3i}, \quad \frac{1 + 2i}{(2 + 3i)^2}, \quad \left(\frac{4 - i}{2 + i}\right)^2, \quad (1 + i)^{246}.$$