

Übungen zur Mathematik für Physiker I, Blatt 2

Die Lösungen sind abzugeben am Freitag, 06.11.2008, VOR Beginn der Vorlesung.

Jede der Aufgaben 2,3,4 läßt sich in wenigen Zeilen lösen.

- (a) Der Einheitskreis (also die Kreislinie) in der komplexen Zahlenebene sei mit S^1 bezeichnet. Zeigen Sie: wenn $z \in S^1$, dann ist $z^{-1} = \bar{z}$. Wenn $z, w \in S^1$, dann ist auch $z \cdot w \in S^1$ und $z/w \in S^1$.
(b) Finden Sie alle Zahlen $z \in \mathbb{C}$ mit $z^2 = 1$; und zeichnen Sie diese in der komplexen Zahlenebene. Analog für die Gleichungen $z^4 = 1$, $z^5 = 1$ und $z^3 = -1$.
(c) Stellen Sie in der Form $a + bi$ dar:

$$\frac{1}{i}, \quad \frac{1}{1+i}, \quad \frac{1}{1-i}, \quad i^k, \quad \left(\frac{1+i}{1-i}\right)^k, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

- Wir nennen zwei Dreiecke ABC und $A'B'C'$ *gleichorientiert ähnlich*, wenn die Eckpunkte A, B, C und A', B', C' den gleichen Umlaufsinn haben und wenn die entsprechenden Innenwinkel übereinstimmen (also der Winkel bei A ist gleich dem Winkel bei A' usw).

Man zeige: Sind ALT, ARM, ORT, ULM vier gleichorientiert ähnliche Dreiecke der Ebene, (wobei A, L, M, R, T, U paarweise verschiedene Punkte sind), dann ist A der Mittelpunkt der Strecke \overline{OU} .

Hinweis: Multiplikation komplexer Zahlen

- Gegeben sei ein beliebiges Viereck in der Ebene. Auf jeder Seite errichten wir nach außen ein Quadrat. Die Mittelpunkte der Quadrate benennen wir der Reihe nach mit X, Y, Z, U . Man beweise: die Strecken XZ und YU sind gleichlang und stehen senkrecht aufeinander.

Hinweis: Komplexe Zahlen

- Seien A, B, C, D vier verschiedene Punkte in der Ebene. Man zeige, daß

$$|AB| \cdot |CD| + |BC| \cdot |AD| \geq |AC| \cdot |BD|.$$

Hinweis: die alten Griechen konnten sogar noch einiges mehr zeigen: das Gleichheitszeichen gilt genau dann, wenn die 4 Punkte auf einer Geraden oder einer Kreislinie liegen. Soweit wollen wir hier aber nicht gehen, damit es ein Dreizeiler bleibt.

- Freiwillige Zusatzaufgabe*

Es sei $z_0 \in \mathbb{C}$ gegeben, mit $|z_0| < 1$. Wir definieren eine Funktion

$$w = w(z) = \frac{z - z_0}{z\bar{z}_0 - 1}, \quad z \in \mathbb{C}, \quad z\bar{z}_0 \neq 1.$$

Zeigen Sie: $|z| < 1 \iff |w(z)| < 1$. Was bewirkt die Abbildung $z \mapsto w(z)$ (geometrisch formuliert) ?

Hinweis: Zeigen Sie zuerst $|z\bar{z}_0 - 1|^2 - |z - z_0|^2 = (1 - |z|^2)(1 - |\bar{z}_0|^2)$. Das müßten Sie kennen.

Aufgaben zum Selberkorrigieren

6. Man stelle folgende Zahlen in trigonometrischer Form und in kartesischer Form dar:

$$(1 - i)^6,$$

$$e^{3\pi i},$$

$$(2 - i\sqrt{3})^3,$$

$$(i - \sqrt{3})^8,$$

$$\left(\sqrt{2 - \sqrt{3}} + i\sqrt{2 + \sqrt{3}}\right)^3,$$

$$\left(\frac{3}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^6,$$

$$e^{3+i\frac{\pi}{3}},$$

$$(1 - i)^{13}.$$

Antworten:

$$8(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2}) = 8i, \quad -1, \quad -10 - 9\sqrt{3}i \approx 18.52(\cos 237.32^\circ + i \sin 237.32^\circ), \quad -128 + 128\sqrt{3}i, \quad -4\sqrt{2}(1 + i) = 8(\cos \frac{5}{4}\pi + i \sin \frac{5}{4}\pi), \\ -27, \quad \frac{1}{2}e^3(1 + i\sqrt{3}), \quad 64(i - 1)$$