Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
M. Dreher

14.11.2008

Übungen zur Mathematik für Physiker I, Blatt 4

Die Lösungen sind abzugeben am Freitag, 21.11.2008, VOR Beginn der Vorlesung.

1. Bestimmen Sie die Koordinaten des Bildpunktes von $(7,7,7)^\top$ bei Drehung um die Achse durch den Ursprung mit Richtungsvektor $(1,0,2)^\top$ um den Winkel $30°$.

2. Gegeben ist ein Dreieck mit den Eckpunkten A, B, C und Seitenlängen a, b, c, wobei A der Kante a gegenüberliegt usw. Der Schnittpunkt der Seitenhalbierenden sei S. Man zeige: Es ist $\overrightarrow{AS} \perp \overrightarrow{BS}$ genau dann, wenn $a^2 + b^2 = 5c^2$.

   Hinweise: Eine Seitenhalbierende ist eine Strecke, die einen Eckpunkt mit dem Mittelpunkt der gegenüberliegenden Kante verbindet. Der Punkt S ist gleich dem Massenschwerpunkt der Punkte A, B, C. Daraus bestimme man, in welchem Verhältnis der Punkt S die Seitenhalbierenden teilt. Außerdem suche man Parallelogramme und wende eine bekannte Formel an.

3. Für das Kreuzprodukt zeige man den Entwicklungssatz und die Identität von Lagrange.

4. Sei $ABCDEF$ ein Sechseck in der Ebene. Jeweils drei benachbarte Ecken bilden ein Dreieck; von diesen Dreiecken gibt es 6 Stück. Von jedem dieser Dreiecke bilden wir den Massenschwerpunkt der Ecken. Man zeige, daß diese 6 Massenschwerpunkte ein Sechseck bilden, bei dem gegenüberliegende Kanten gleichlang und parallel sind.

5. *Freiwillige Zusatzaufgabe*

   Sei A eine Matrix vom Format 3×3. Zeigen Sie:

   Wenn $Ax = 0$ für jeden Vektor $x \in \mathbb{R}^3$, dann muß A die Nullmatrix sein.

Aufgabe zum Selberkorrigieren

6. Gegeben seien die Vektoren

$$a = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad c = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Man berechne:

(a) $\|a\|$, $\|b\|$, $\|c\|$,

(b) $\langle a, b\rangle$, $\langle b, c\rangle$, $\langle a, c\rangle$,

(c) $a \times c$, $b \times c$, $\langle a \times b, c\rangle$,

(d) $a \times (b \times c)$, $(a \times b) \times c$,

(e) das Spatprodukt $[a, b, c]$.

Lösungen:

(a) $\sqrt{6}$, $\sqrt{2}$, $\sqrt{2}$,

(b) 2, 0, 0,

(c) $(2, 2, 2)^T$, $(0, 2, 0)^T$, -4,

(d) $(-2, 0, 2)^T$, $(0, 0, 0)^T$,

(e) -4.