Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
M. Dreher 21.11.2008

Übungen zur Mathematik für Physiker I, Blatt 5

Die Lösungen sind abzugeben am Freitag, 28.11.2008, VOR Beginn der Vorlesung.

1. Sei n eine positive ganze Zahl. Beweisen Sie mittels vollständiger Induktion, daß die Funktion $x \mapsto \cos(n \arccos x)$ ein Polynom in x vom Grade n ist, mit höchstem Koeffizienten 2^{n-1}. Was ist der Definitionsbereich dieser Funktion ? Geben Sie die Nullstellen dieser Funktion an, und machen Sie eine Skizze der Lage der Nullstellen für große n.

2. (a) Welche der folgenden Mengen von Vektoren des $\mathbb{R}^4$ sind linear abhängig ?

$$\{(27,0,0,0),(2,0,0,2),(-3,0,0,7)\}, \tag{1}$$
$$\{(12,34,56,1),(47,11,189,4),(2008,1,0,0)\}. \tag{2}$$

   (b) Zeigen Sie, daß die Vektoren

$$u_1 = \begin{pmatrix} 2+\mathrm{i} \\ 1+\mathrm{i} \end{pmatrix}, \qquad u_2 = \begin{pmatrix} 1-\mathrm{i} \\ 4-3\mathrm{i} \end{pmatrix}$$

   ein Erzeugendensystem des $\mathbb{C}$–Vektorraumes $\mathbb{C}^2$ bilden.

   (c) Man untersuche, ob die Funktionen $x \mapsto \sin(x)$, $x \mapsto \cos(2x)$, $x \mapsto \cos(3x)$ linear unabhängig sind.

3. Sei $V = C([-1,1];\mathbb{R})$ der Vektorraum derjenigen Funktionen, die auf $[-1,1]$ definiert sind, reelle Werte haben und auf $[-1,1]$ stetig sind. Wir definieren eine Abbildung $\langle\cdot,\cdot\rangle : V \times V \to \mathbb{R}$ durch

$$\langle f,g\rangle = \int_{x=-1}^{x=1} f(x)g(x)\,\mathrm{d}x, \qquad \text{für } f,g \in C([-1,1];\mathbb{R}).$$

   Man beweise, daß $\langle\cdot,\cdot\rangle$ ein Skalarprodukt ist. Das heißt, daß die Bedingungen aus Satz 1.26 zu zeigen sind.

4. Sei ABC ein Dreieck. Wir wählen auf der Seite AB einen Punkt C', auf der Seite BC einen Punkt A', auf der Seite CA einen Punkt B' derart, daß die Dreieckskanten jeweils im Verhältnis $2:1$ geteilt werden:

$$|BC'| = 2|AC'|, \qquad |CA'| = 2|BA'|, \qquad |AB'| = 2|CB'|.$$

   Wenn wir die Strecken AA' und BB' und CC' einzeichnen, entsteht im „Zentrum" von ABC ein kleines Dreieck. Man bestimme dessen Flächeninhalt im Verhältnis zum Flächeninhalt des Dreiecks ABC.

   Hinweis: Kreuzprodukt als Werkzeug zur Flächeninhaltsbestimmung.

5. *Freiwillige Zusatzaufgabe*

   Beweisen Sie mit vollständiger Induktion, daß

$$1 + q + q^2 + \cdots + q^n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q},$$

   für jedes $q \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$.

Aufgabe zum Selberkorrigieren

6. Zeigen Sie, daß
$$\sum_{k=0}^{n}(2k+2)^2 = \frac{2(n+1)}{3}(n+2)(2n+3), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Hinweis: Stolperfallentext beachten.