Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
M. Dreher

28.11.2008

Übungen zur Mathematik für Physiker I, Blatt 6

Die Lösungen sind abzugeben am Freitag, 05.12.2008, VOR Beginn der Vorlesung.

1. Sei $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ eine symmetrische Matrix, also $A^\top = A$. Wir definieren eine Abbildung

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$

gemäß $\langle u, v\rangle = (u_1, u_2)A\binom{v_1}{v_2}$, wobei $u, v \in \mathbb{R}^2$. Zeigen Sie:

- diese Abbildung ist $\mathbb{R}$-linear im ersten Faktor und $\mathbb{R}$-linear im zweiten Faktor (man sagt auch bilinear)
- diese Abbildung ist symmetrisch (also $\langle u, v\rangle = \langle v, u\rangle$). *Hinweis:* Lesen Sie u und v als Matrizen vom Format 1×2 oder 2×1 und erinnern Sie sich, wie man Produkte von Matrizen transponiert.

Untersuchen Sie, ob sich ein Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^2$ ergibt, wenn

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{bzw.} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Hinweis: Wenn Sie die beiden obigen • abgearbeitet haben, haben Sie bloß noch zu zeigen, daß die Abbildung positiv definit ist.

2. Beantworten Sie die Frage vor Definition 2.28, beweisen Sie Satz 2.30, und beantworten Sie die beiden Fragen nach Satz 2.30 (im Laufe des Beweises werden Sie sowieso daran vorbeikommen).

3. Die Funktion $x \mapsto \exp(\frac{1}{10}x)$ ist auf dem Intervall $[0, 1]$ mit den Methoden aus Abschnitt 2.3.2 bestmöglich durch eine lineare Funktion $x \mapsto ax + b$ anzunähern. Der Approximationsfehler ist anzugeben.

4. Es sei $R \subset \mathbb{R}^4$ derjenige dreidimensionale affine Raum, der durch die Punkte $(4, 0, 0, 0)^\top$, $(0, 3, 0, 0)^\top$, $(0, 0, 2, 0)^\top$ und $(0, 0, 0, 1)^\top$ verläuft. Wie weit ist R vom Punkt $(78, 4, 5, 7)^\top$ entfernt ? Benutzen Sie dabei die Methoden aus Abschnitt 2.3.2 (also keine Hesse-Normalform).
Hinweis: Prüfen Sie zunächst, ob R ein Untervektorraum ist.

5. *Freiwillige Zusatzaufgabe*

Sei $n \in \mathbb{N}_+$. Zeigen Sie (z.B. mittels vollständiger Induktion), daß Polynome P_n und Q_n existieren, so daß für jedes $x \in \mathbb{R}$ gilt:

$$\cos(nx) = P_n(\cos(x)), \qquad \sin(nx) = \sin(x)Q_n(\cos(x)).$$

Aufgabe zum Gegenseitigkorrigieren

6. Wenden Sie das Gram–Schmidt–Verfahren auf die Vektoren $f_1 = (2,1,0,3)^\top$, $f_2 = (0,1,0,4)^\top$, $f_3 = (1,1,1,1)^\top$ des $\mathbb{R}^4$ an.