Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
M. Dreher

05.12.2008

Übungen zur Mathematik für Physiker I, Blatt 7

Die Lösungen sind abzugeben am Freitag, 12.12.2008, VOR Beginn der Vorlesung.

1. Es sei V ein K–Vektorraum. Es seien Vektoren $v_1, \ldots, v_n$ aus V gegeben, die linear abhängig sind. Zusätzlich setzen wir voraus, daß jeweils $n-1$ dieser Vektoren linear unabhängig sind. Beweisen Sie die beiden folgenden Aussagen:

   (a) Es existieren Zahlen $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in K \setminus \{0\}$ mit $\sum_{j=1}^n \lambda_j v_j = 0$.

   (b) Die Zahlen $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ seien so wie eben. Wenn es weitere Zahlen $\mu_1, \ldots, \mu_n$ gibt mit der Eigenschaft, daß $\sum_{j=1}^n \mu_j v_j = 0$ gilt, dann ist immer

   $$\frac{\mu_1}{\lambda_1} = \frac{\mu_2}{\lambda_2} = \cdots = \frac{\mu_n}{\lambda_n}.$$

2. **(LR–Zerlegung)** Gegeben ist die Matrix

   $$A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 0 \\ -1 & -2 & 3 \\ 3 & 7 & -1 \end{pmatrix}.$$

   (a) Man bringe A auf Dreiecksform (das heißt: unterhalb der Diagonalen ausräumen, aber nicht oberhalb; und die Diagonaleneinträge auch nicht auf 1 normieren).

   (b) Man finde Matrizen B und C mit $A = BC$ und der Gestalt

   $$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ b_{21} & 1 & 0 \\ b_{31} & b_{32} & 1 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ 0 & c_{22} & c_{23} \\ 0 & 0 & c_{33} \end{pmatrix}.$$

   (c) Wo finden Sie die Einträge b_{ij} aus (b) in (a) wieder ?

   (d) Wenn eine solche Zerlegung $A = BC$ bekannt ist — wie kann man dann Gleichungssysteme der Form $Ax = b$ ganz einfach lösen ?

3. Seien $C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $c = (-1, 4)^\top$, $x = (x_1, x_2)^\top$.

   (a) Man berechne $c^\top x$, $x^\top x$, $xx^\top$, $x^\top Cx$.

   (b) Welche geometrischen Gebilde werden durch $c^\top x = 1$ bzw. $x^\top Cx = 1$ bzw. $x^\top Cx + c^\top x = 1$ bzw. $x^\top x = 1$ beschrieben ?

4. Man bestimme die Lösung $(x(t), y(t), z(t))^\top$ des folgenden Gleichungssystems für $t > 0$:

   $$\begin{aligned} t^2x + y + z &= t, \\ tx + t^2y - t^2z &= -t^6, \\ x - ty - t^4z &= t^2. \end{aligned}$$

   Gegen welchen Grenzwert strebt die Lösung für $t \to 0$? Wie lautet die Lösung für $t = 0$?

5. *Freiwillige Zusatzaufgabe*

   Von einer stetigen Funktion f ist bekannt, daß $\int_{x=0}^1 f(x)\,\mathrm{d}x = 1$ und $\int_{x=0}^1 xf(x)\,\mathrm{d}x = 1$. Man zeige $\int_{x=0}^1 f^2(x)\,\mathrm{d}x \geq 4$.

Aufgabe zum Gegenseitigkorrigieren

6. (a) Man löse das Gleichungssystem $Ax = b$, mit

$$A = \begin{pmatrix} 2+\mathrm{i} & 1 \\ 1-\mathrm{i} & 1+\mathrm{i} \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} 1-\mathrm{i} \\ 1+\mathrm{i} \end{pmatrix}.$$

(b) Im Vektorraum $\mathbb{C}^3$ über dem Körper $K = \mathbb{C}$ sei der Vektor $b_1 = (1, \mathrm{i}, 2-\mathrm{i})^T$ gegeben. Man ermittle Vektoren $b_2 \neq 0$ und $b_3 \neq 0$, sodaß (b_1, b_2, b_3) ein Orthogonalsystem bilden.

Hinweis: Gram-Schmidt-Verfahren. Aufpassen mit dem Konjugieren eines Faktors des Skalarprodukts.