Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
M. Dreher

12.12.2008

Übungen zur Mathematik für Physiker I, Blatt 8

Die Lösungen sind abzugeben am Freitag, 19.12.2008, VOR Beginn der Vorlesung.

1. Gegeben sei das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 + x_3 &= 0, \\ -2\lambda x_1 + 9x_2 + \lambda x_3 &= 6, \\ 2x_1 + \lambda x_2 + 2x_3 &= 1. \end{aligned}$$

   (a) Für welche Werte $\lambda \in \mathbb{R}$ ist das Gleichungssystem eindeutig lösbar ?
   (b) Für welche Werte $\lambda \in \mathbb{R}$ existieren unendlich viele Lösungen ?
   (c) Für welche Werte $\lambda \in \mathbb{R}$ existieren keine Lösungen ?

2. Man bestimme die Dimensionen von Kern und Bild der untigen Matrizen, und man gebe für Kern und Bild entsprechende Basen an.

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 7 & -6 \\ 2 & 1 & 5 & -1 \\ 1 & 0 & -4 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & -2 \\ -3 & -2 & 3 \end{pmatrix}.$$

3. Für jede der folgenden Funktionen $f\colon X \to Y$ bestimme man den Wertebereich W_f und gebe an, ob sie injektiv, surjektiv, bijektiv ist.

   (a) $X = [-2, +\infty)$, $Y = \mathbb{R}$, $f(x) = (x+1)^2$,
   (b) $X = [2, +\infty)$, $Y = \mathbb{R}$, $f(x) = (x+1)^2$,
   (c) $X = [0, 1]$, $Y = [0, 1]$, $f(x) = (x-1)^2$,
   (d) $X = \mathbb{Z}$, $Y = \mathbb{Z}$, $f(x) = x^4$.

   Man bestimme die Umkehrfunktionen aller injektiven Funktionen (inklusive der Angabe ihres Definitionsbereichs).

4. Für das folgende Gleichungssystem bestimme man den Rang der Koeffizientenmatrix A und den Rang der erweiterten Koeffizientenmatrix $(A|b)$. Daraus urteile man über die Lösbarkeit des Gleichungssystems. Wieviele (geeignet zu selektierende) Unbekannte können frei gewählt werden ?

$$\begin{aligned} 6x_1 + 4x_2 + 17x_3 + 8x_4 &= -20, \\ 3x_1 + 2x_2 + 7x_3 + 7x_4 &= -4, \\ 3x_1 + 2x_2 + 8x_3 + 5x_4 &= -8, \\ -x_3 + 2x_4 &= 4. \end{aligned}$$

5. *Freiwillige Zusatzaufgabe*
   Beweisen Sie $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$ für $n, k \in \mathbb{N}$, $0 \le k \le n$.
   Man beweise anschließend die binomische Formel für beliebige Elemente $x, y \in \mathbb{C}$:

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}, \quad n \in \mathbb{N}_0.$$

Hinweis: Induktion.

Aufgabe zum Selberkorrigieren

6. Man ermittle die Lösung X zu $AX = B$, wobei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & -2 & 3 \\ -1 & 2 & 2 & -4 \\ 0 & 1 & 2 & -5 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \\ 3 & -1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}.$$

Lösung:

$$X = \begin{pmatrix} -1 & 7 \\ 2 & -2 \\ -9 & 17 \\ -4 & 16 \end{pmatrix}.$$