Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
M. Dreher

19.12.2008

Übungen zur Mathematik für Physiker I, Blatt 9

Die Lösungen sind abzugeben am Freitag, 09.01.2009, VOR Beginn der Vorlesung.

1. Man bestimme die Lösungen $y = y(x)$ der Anfangswertprobleme

$$\begin{aligned} y''(x) + 16y(x) &= \sin(2x), \qquad && y(0) = 0, \quad y'(0) = 1, \\ y''(x) + 2y'(x) + 17y(x) &= \cos(x), && y(0) = 0, \quad y'(0) = 0, \\ y''(x) + 2y'(x) + 10y(x) &= x, && y(0) = 0, \quad y'(0) = 0, \\ y''(x) - 4y(x) &= x, && y(0) = 1, \quad y'(0) = 0, \end{aligned}$$

Um eine spezielle Lösung des inhomogenen Problems zu bestimmen, probiere man mit einer Funktion $y^* = y^*(x)$, die so ähnlich aussieht wie die rechte Seite.

2. **(Fredholmsche Alternative ganz einfach)**

Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times m}$ eine beliebige Matrix, und seien $\langle \cdot, \cdot \rangle_n$ sowie $\langle \cdot, \cdot \rangle_m$ die üblichen Skalarprodukte im $\mathbb{R}^n$ bzw. im $\mathbb{R}^m$.

(a) Von welchem Vektorraum in welchen Vektorraum bilden A bzw. $A^\top$ ab ?

(b) Was bedeuten die Dimensionsformeln für diese beiden Abbildungen ? Was können Sie über die Ränge von A und $A^\top$ aussagen ?

(c) Beweisen Sie: wenn $x \in \mathbb{R}^m$ eine Lösung für das System $Ax = b$ mit $b \in \mathbb{R}^n$ ist, dann ist $\left\langle A^\top y, x \right\rangle_m = \langle y, b \rangle_n$ für jeden Vektor $y \in \mathbb{R}^n$.

(d) Beweisen Sie damit: $\ker A^\top \perp \operatorname{img} A$ und $\ker A \perp \operatorname{img} A^\top$. Das bedeutet: jeder Vektor aus dem linken Vektorraum steht senkrecht auf jedem Vektor aus dem rechten Vektorraum.

(e) Schreiben Sie die Dimensionsformel für Untervektorräume geeignet oft hin.

(f) Beweisen Sie damit: $\mathbb{R}^m = \ker A \oplus \operatorname{img} A^\top$ und $\mathbb{R}^n = \ker A^\top \oplus \operatorname{img} A$.

(g) Beweisen Sie die und erquicken Sie sich an der Alternative von Fredholm:
Das System $Ax = b$ ist lösbar genau dann, wenn $b \perp \ker A^\top$.

(h) Was bedeutet das für $n = m$ und reguläre (also invertierbare) Matrix A ?

Anmerkung: So richtig interessant wird es, wenn man den $\mathbb{R}^n$ und $\mathbb{R}^m$ durch Funktionenvektorräume ersetzt und für A einen Differentialoperator verwendet.

3. Wir parkettieren die Ebene auf periodische Weise mit gleichseitigen Dreiecken, die alle die gleiche Kantenlänge $L = 1$ haben.

(a) Geben Sie zwei Basisvektoren $(\vec{b}_1, \vec{b}_2)$ des $\mathbb{R}^2$ an, die jeweils auf einer Dreieckskante verlaufen.

(b) Bestimmen Sie die Vektoren der dazugehörigen dualen Basus $(\vec{b}^1, \vec{b}^2)$.

(c) Bestimmen Sie die Längen aller vier Basisvektoren. Was fällt auf ?

(d) Entwickeln Sie rechenaufwandsarm den Vektor $\vec{x} = (24, 12)^\top$ bezüglich der Basis $(\vec{b}_1, \vec{b}_2)$ und bezüglich der Basis $(\vec{b}^1, \vec{b}^2)$.

4. Wenn eine Funktion $v = v(t, x)$ der Differentialgleichung $\frac{\partial^2}{\partial t^2} v - c^2 \triangle v = 0$ gehorcht, dann beschreibt diese Funktion v die Auslenkungen einer Welle, und diese Welle hat die Ausbreitungsgeschwindigkeit c.

Sei nun $\vec{u} = \vec{u}(t, x)$ das Verschiebungsvektorfeld zu einem elastischen Festkörper mit Materialdichte ϱ, Kompressionsmodul K und Schermodul G. Dann gilt die Differentialgleichung

$$\varrho \frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial t^2} - G \triangle \vec{u} - \left(K + \frac{G}{3} \right) \nabla \operatorname{div} \vec{u} = 0.$$

Bestimmen Sie die Ausbreitungsgeschwindigkeit des divergenzfreien Anteils von $\vec{u}$, und die Ausbreitungsgeschwindigkeit des Potentialanteils von $\vec{u}$.

Hinweis: Man kann vertauschen: ∇ mit $\triangle$, sowie div mit $\triangle$, aber nicht ∇ und div.

Hinweis: Bestimmen Sie von der linken Seite den divergenzfreien Anteil und den Potentialanteil. Benutzen Sie die Darstellung des $L^2(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$ als direkte Summe zweier Untervektorräume.

5. *Freiwillige Zusatzaufgabe*

   A few years ago, the following game was very popular in Sikinian casinos: An even number of cards, on each of which a natural number was written, were placed in a row on table. Then these cards were alternately removed by two players, but in each move it was only allowed to remove either the left–most or the right–most card. After they had finished this procedure, each of the two players had to compute the sum of the numbers written on the cards he had removed and then he had to pay that many Kulotniks to his opponent. After a while, however, it became known that the Sikinian mathematicians have never lost any money in this game when they were allowed to have the first move and thus the game came out of fashion again. Describe a strategy that the mathematicians might have used.

Adventsaufgabe

6. Im n-Advent-Land (n sei eine natürliche Zahl) dauert die Adventszeit n Wochen. Auch dort ist es üblich, daß zum 1. Advent eine von n Kerzen für eine Brenndauer von D Stunden angezündet wird, zum 2. Advent zwei Kerzen angezündet werden und so weiter bis zum n-ten Advent, wenn alle n Kerzen angezündet werden. Wir nehmen an, daß die Brenndauer bei jedem Advent für jede Kerze gleichlang ist, und daß die Abbrenngeschwindigkeiten immer gleich sind, so daß nach jedem Anzünden eine gleiche Höhe (und diese ist positiv) abbrennt. Zum Beginn sind alle Kerzen gleichlang. Für welche n kann man für die Kerzen ein Anzündschema so finden, daß nach dem n-ten Advent alle Kerzen rückstandsfrei verbrannt sind?

Am Mittwoch, 07. Januar, ist von 18:00 bis 19:30 eine Globalübung im A704.
Die Klausur ist am Freitag, 20. Februar, von 10:00 bis 12:00 im R513 und R611.

```
, ,    ,      ,   ,     ,     ,   ,     ,     ,     ,      ,      ,
,       ,     ,   ,       ,   .----. ,  ,     ,      ,       ,     ,
 ,    ,   ,   ,     ,   ,   , |   :|        ,   , ,   ,   ,       ,
   ,        ,   ,     ,     __|====|__ ||||||  ,        ,      ,     ,
 ,   ,    ,   ,    ,    , *  / o  o \  ||||||,  ,  ,        ,    ,
,   ,   ,        ,   ,     * | -=   |  \====/ ,       ,   ,    ,    ,
   ,  ,    ,  ,           , U==\__//__. \\//    ,  ,        ,    ,
,   ,  ,    ,    ,    ,  ,   / \\==// \ \ ||  ,   ,      ,          ,
 ,  ,    ,    ,    ,      ,|    o ||  | \||   ,      ,     ,   ,    ,
,      ,    ,   ,      ,   |    o ""  |\_|B),   ,  ,    ,       ,
  ,  ,   ,   ,    ,      , \__  --__/   ||  ,        ,      ,     ,
,  ,   ,      ,    ,   ,  /          \  ||,  ,   ,      ,    ,   ,
 ,      ,   ,    ,        |           | ||     ,  ,   ,    ,   ,
,    ,   ,   ,  ,    ,   ,|           | || ,  ,  ,   ,   ,     ,  ,
 ------_____---------____---\__ --_  __/__LJ__---------________-----___
```