Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
M. Dreher

09.01.2009

Übungen zur Mathematik für Physiker I, Blatt 10

Die Lösungen sind abzugeben am Freitag, 16.01.2009, VOR Beginn der Vorlesung.

1. Sei $A = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$ der übliche Differentialoperator, und es seien $U = C^1([0,1];\mathbb{R})$, $V = C([0,1];\mathbb{R})$ die üblichen Funktionenräume. Bestimmen Sie den Kern von $A\colon U \to V$, und erraten Sie den Kern des Operators $A - 7\colon U \to V$. Hierbei definieren wir $(A-7)u := u' - 7u$ für $u \in U$.

   Anmerkung: Eigentlich müßte man $A - 7\mathrm{id}_U$ anstelle von $A - 7$ schreiben, aber nur eigentlich.

2. Man beweise:

$$\forall a, b \in \mathbb{R} \quad \exists c, d \in \mathbb{R} \quad : \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad : \quad a\cos x + b\sin x = c\sin(x+d)$$

   Hinweis: Gesucht ist ein Rechenverfahren, wie man c und d ermitteln kann, wenn a und b gegeben sind. Dabei sollen c und d *so* beschaffen sein, daß die Gleichung $a\cos x + \ldots$ für sämtliche x gilt.

3. Man zeige durch ein Beispiel, daß der Raum $C([a,b];\mathbb{R})$, ausgestattet mit der $\|\cdot\|_1$–Norm, unvollständig ist.

4. Sei U ein Vektorraum mit Norm, und sei M eine Teilmenge von U. Man zeige folgende Aussagen:

   Wenn M abgeschlossen ist, dann ist $\partial M \subset M$.

   Wenn $\partial M \subset M$, dann ist M abgeschlossen.

   Hinweis: Arbeiten Sie konsequent mit den Definitionen der Begriffe „Häufungspunkt“, „abgeschlossen“, „Randpunkt“, und der Beweis läuft fast von allein.

5. *Freiwillige Zusatzaufgabe*

   Sei $P_n = P_n(x)$ ein Polynom vom Grad n, mit höchstem Koeffizienten 2^{n-1}. Zeigen Sie, daß $\max_{x\in[-1,1]} |P_n(x)| \geq 1$.

   Anmerkung: Das bedeutet: egal wie Sie die niederen Koeffizienten von P_n wählen, Sie werden es nie schaffen, daß $\max_{x\in[-1,1]} |P_n(x)| < 1$ wird.

   Hinweis: indirekter Beweis. Angenommen, es wäre $|P_n(x)| < 1$ für jedes $|x| \leq 1$. Tragen Sie Ihr Wissen über die Tschebyscheff–Polynome T_n zusammen. Skizzieren Sie (natürlich ohne schultypische Kurvendiskussion) den Graphen von T_n, für einige selbstgewählte Werte von n. Bilden Sie $Q_n(x) = T_n(x) - P_n(x)$. Zählen Sie, wie oft Q_n das Vorzeichen wechselt. Suchen Sie einen Widerspruch. Nehmen Sie bei Bedarf $n = 3, 4, 5$ oder ähnliches als konkrete Beispiele.

Die Klausur ist am Freitag, 20. Februar, von 10:00 bis 12:00 im R513 und R611.

Aufgabe zum Gegenseitighelfen

6. Finden Sie eine Folge reeller Zahlen mit genau drei Häufungspunkten. Finden Sie eine weitere Folge reeller Zahlen, die jede natürliche Zahl als Häufungspunkt hat.

Die Einzeileraufgabe mit Einzeilerlösung

7. Für gerade n zeige man

$$\binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - \binom{n}{3} + - \ldots - \binom{n}{n-1} + \binom{n}{n} = 0.$$