Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
M. Dreher

16.01.2009

Übungen zur Mathematik für Physiker I, Blatt 11

Die Lösungen sind abzugeben am Freitag, 23.01.2009, VOR Beginn der Vorlesung.

1. Sei $n \in \mathbb{N}$. Wir setzen

$$J_n(z) := \left(\frac{z}{2}\right)^n \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(-\frac{1}{4}z^2\right)^k}{k!(k+n)!}.$$

   (a) Für welche $z \in \mathbb{C}$ konvergiert diese Reihe ? Ungefähr welcher Summand hat den größten Betrag ? Kommentieren Sie die Konvergenzgeschwindigkeit und vergleichen Sie mit anderen Reihen, die Sie sehen oder schon gesehen haben.

   (b) Zeigen Sie das Additionstheorem $J_{n-1}(z) + J_{n+1}(z) = \frac{2n}{z} J_n(z)$ für $z \neq 0$ und $n \in \mathbb{N}_+$.

Anmerkung: Das sind die Besselfunktionen mit Anwendungen bei Schwingungen von Membranen oder Flugzeugflügeln oder Oszillatorketten.

2. Für welche $z \in \mathbb{C}$ konvergiert die Reihe der Exponentialfunktion $\exp(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^n$?

   (a) Wir setzen $a_n(z) := \frac{1}{n!} z^n$. Wie verhält sich die Folge der Beträge $|a_n(z)|$, wenn n von 0 beginnend die natürlichen Zahlen durchläuft ?

   (b) Welcher Summand ist der Betragsgrößte ? Betrachten Sie $z = -30$ und $z = +20$. Wie groß ist dieser Summand ? Was fällt auf ?

3. (a) Es sei $f = f(x,y) = \sin(x)\cos(y)$ und $g = g(x,y) = y^2 - x^2$ für $x, y \in \mathbb{R}$. Man bestimme

$$\inf_{y\in\mathbb{R}}\left(\sup_{x\in\mathbb{R}} f(x,y)\right), \qquad \sup_{x\in\mathbb{R}}\left(\inf_{y\in\mathbb{R}} f(x,y)\right), \qquad \inf_{y\in\mathbb{R}}\left(\sup_{x\in\mathbb{R}} g(x,y)\right), \qquad \sup_{x\in\mathbb{R}}\left(\inf_{y\in\mathbb{R}} g(x,y)\right).$$

   (b) Man bestimme $\lim_{n\to\infty}(\lim_{m\to\infty} a_{n,m})$ und $\lim_{m\to\infty}(\lim_{n\to\infty} a_{n,m})$ für $a_{n,m} = \frac{n}{n+m}$.

   (c) Erkenntnis ?

4. Sei $\gamma \in \mathbb{R}$ ein positiver Parameter. Wir definieren eine Folge reeller Zahlen $(a_n)_{n\geq 1}$ durch $a_1 = 1$, $a_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + \frac{\gamma}{a_n})$.

   (a) Setzen Sie $\gamma = 16$, $\gamma = 2$, $\gamma = 80$, und bestimmen Sie jedesmal einige Folgenglieder a_n mit dem Taschenrechner.

   (b) Staunen Sie über die schön schnelle Konvergenz.

   (c) Erraten Sie einen Kandidaten für den Grenzwert $g = \lim_{n\to\infty} a_n$, gestützt auf Ihre Rechnungen. (Rechnen Sie notfalls bis zum a_7 oder a_8.)

   (d) Beweisen Sie folgende Aussage: „*Wenn* die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ überhaupt einen Grenzwert hat, dann muß dieser Grenzwert gleich [Kandidaten hier einsetzen] sein".

5. *Freiwillige Zusatzaufgabe*

   In Aufgabe 4 haben wir noch nicht gezeigt, *daß* es überhaupt einen Grenzwert gibt. Das holen wir nach mit folgenden zwei Schritten:

   (a) Zeigen Sie $a_n \geq g$ für $n \geq 2$, wobei g Ihr Limeskandidat ist.

   Hinweis: eine Ungleichung der Form $(p-q)^2 \geq 0$ könnte ein guter Start sein.

   (b) Zeigen Sie anschließend $a_{n+1} \leq a_n$ für $n \geq 2$.

Die Klausur ist am Freitag, 20. Februar, von 10:00 bis 12:00 im R513 und R611.

Aufgabe zum Rechnenüben

6. Für welche $x \in \mathbb{R}$ konvergieren die folgenden Reihen:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{3n^2}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-x)^n}{\sqrt{n}}.$$

Antwort: $[-1, 1)$, $[-1, 1]$, $(-1, 1]$