Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
M. Dreher

23.01.2009

Übungen zur Mathematik für Physiker I, Blatt 12

Die Lösungen sind abzugeben am Freitag, 30.01.2009, VOR Beginn der Vorlesung.

1. Für welche $z \in \mathbb{C}$ bzw. $x \in \mathbb{R}$ konvergieren die folgenden Reihen:

$$f_1(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k^k}{k!} z^k, \qquad f_2(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-x)^k}{k+2}, \qquad f_3(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\cdot\dots\cdot(\alpha-n+1)}{n!} z^n \qquad (\alpha \in \mathbb{C}),$$

$$f_4(z) = \sum_{k=0}^{\infty} (k!)^2 z^k, \qquad f_5(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\cos(kx)}{2^k}.$$

2. (a) Man finde eine stetige Funktion von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$, bei der das Bild einer offenen Menge nicht unbedingt wieder eine offene Menge ist.
   (b) Man finde eine stetige Funktion von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$, bei der das Bild einer abgeschlossenen Menge nicht unbedingt wieder eine abgeschlossene Menge ist.
   (c) Man finde eine stetige Funktion von $\mathbb{C}$ nach $\mathbb{C}$, die jede Zahl aus $\mathbb{C}$ unendlich oft als Wert annimmt.

3. Mittels Cauchy–Produktreihe zeige man das Additionstheorem der Exponentialfunktion in $\mathbb{C}$.

4. Die Funktion

$$f = f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n)^{2n}}$$

   soll auf dem Intervall $[-1, 1]$ durch ein Polynom angenähert werden, sodaß der Fehler in jedem Punkt des Intervalls kleiner ist als 10^{-4}.

   (a) Geben Sie eine verwertbare Abschätzung des Fehlers an, der entsteht, wenn man die Reihensummation bei $n = N$ abbricht (das geht ohne Taylorformel).
   (b) Folgen Sie der Methode der Tschebyscheff–Polynome, dargestellt im Text auf der Homepage, Seiten 10 und 11.

5. *Freiwillige Zusatzaufgabe*

   Untersuchen Sie die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2+(-1)^n}{2^{n-1}}$ auf Konvergenz mittels Quotientenkriterium, und mittels Wurzelkriterium. Welches der beiden Kriterien ist aussagekräftiger ?

Die Klausur ist am Freitag, 20. Februar, von 10:00 bis 12:00 im R513 und R611.

Aufgabe zum Selberkorrigieren

6. Man bestimme den Entwicklungspunkt und Konvergenzradius der Potenzreihen

$$\sum_{k=1}^{\infty}(k3^k)^{-1}(2z-1)^{3k+2}, \quad \sum_{k=1}^{\infty}\frac{k^2}{k!}z^{5k}, \quad \sum_{k=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{k}\right)^{k^2}(ez+\pi)^k.$$

Lösung: $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}3^{1/3})$, $(0, \infty)$, $(-\frac{\pi}{e}, e^{-2})$.