Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
M. Dreher

30.01.2009

# Übungen zur Mathematik für Physiker I, Blatt 13

Die Lösungen sind abzugeben am Freitag, 06.02.2009, VOR Beginn der Vorlesung.

1. Für reelle $x$ definieren wir $\cosh(x) := \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$ und $\sinh(x) := \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$.
   (a) Bestimmen Sie die Ableitungen dieser Funktionen und zeigen Sie $\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1$.
   (b) Untersuchen Sie auf Monotonie und skizzieren Sie die Graphen.

2. (a) Die Ausbreitung von Wasserwellen in einem Kanal kann beschrieben werden durch die Differentialgleichung
$$\frac{\partial}{\partial t}u(t,x) + \frac{\partial^3}{\partial x^3}u(t,x) + 6u(t,x) \cdot \frac{\partial}{\partial x}u(t,x) = 0,$$
   wobei $u = u(t,x)$ die Auslenkung der Wasseroberfläche aus der Ruhelage bezeichnet, $t \in \mathbb{R}$ die Zeitvariable ist und $x \in \mathbb{R}^1$ die Ortsvariable. Man zeige, daß eine Lösung gegeben ist durch
$$u(t,x) = \frac{2c}{\cosh^2(\sqrt{c}(x - 4ct))},$$
   wobei $c \in \mathbb{R}$ ein wählbarer positiver Parameter ist.
   *Hinweis:* Lindwurmlange Rechnungen zu fabrizieren ist eines Physikers unwürdig und deshalb auch nicht das Aufgabenziel. Das Lernziel besteht darin, die der Rechnung innewohnenden Mechanismen zu verstehen, die Arbeitsschritte sinnvoll zusammenzufassen, sodaß ein kurzer und sehr verständlicher Aufschrieb entsteht. Das geht auf etwas weniger als einer A4-Seite.
   (b) Man mache eine Skizze von $u$, beschreibe den Zusammenhang zwischen Wellenhöhe, Wellenbreite und Ausbreitungsgeschwindigkeit, und entscheide ob das Superpositionsprinzip gilt.
   *Anmerkung:* Die Funktion $u$ heißt **Solitonen**lösung, und in der Sprache der theoretischen Mechanik formuliert: die Differentialgleichung beschreibt ein vollständig integrables HAMILTONsches System, das sogar unendlich viele Erhaltungsgrößen hat.

3. Für eine beschränkte Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ reeller Zahlen bezeichnen wir mit
$$\liminf_{n\to\infty} x_n, \qquad \limsup_{n\to\infty} x_n$$
   den kleinsten bzw. größten Häufungspunkt dieser Folge (limes inferior bzw. limes superior).
   Finden Sie zwei beschränkte Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ reeller Zahlen mit
$$\left(\liminf_{n\to\infty} a_n\right) + \left(\liminf_{n\to\infty} b_n\right) < \liminf_{n\to\infty}(a_n + b_n) < \limsup_{n\to\infty}(a_n + b_n) < \left(\limsup_{n\to\infty} a_n\right) + \left(\limsup_{n\to\infty} b_n\right).$$
   *Moral:* Die Addition reeller Zahlen ist mysteriöser als man glaubt. Es ist eben nicht zulässig, das $+$ am $\liminf$ vorbeizuziehen.

4. (a) Skizzieren Sie die Graphen der folgenden Funktionen, und untersuchen Sie auf Stetigkeit:
$$f(x) = \begin{cases} \sin\left(\frac{1}{x}\right) & : x \neq 0, \\ 0 & : x = 0, \end{cases} \qquad g(x) = \begin{cases} x\sin\left(\frac{1}{x}\right) & : x \neq 0, \\ 0 & : x = 0. \end{cases}$$
   (b) Es seien $a, b \in \mathbb{N}$ zwei Parameter, und es sei $h = h(x)$ gegeben durch
$$h(x) = \begin{cases} x^a \sin\left(\frac{1}{x^b}\right) & : x \neq 0, \\ 0 & : x = 0. \end{cases}$$
   Finden Sie Werte für $a$ und $b$ so, daß die Ableitung $h'$ überall existiert (auch im Nullpunkt), aber $h'$ auf dem Intervall $[-1,1]$ unbeschränkt ist.

*Die Klausur ist am Freitag, 20. Februar, von 10:00 bis 12:00 im R513 und R611.*