Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
M. Dreher

21.04.2009

Übungen zur Mathematik für Physiker II, Blatt 1

Die Lösungen sind abzugeben am Dienstag, 28.04.2009, VOR Beginn der Vorlesung.
(einmalige Sonderregelung wegen des Maifeiertags)

1. Wir betrachten eine Folge $(y_1, y_2, \dots)$, die definiert ist wie folgt:

$$y_1 = 4, \qquad y_2 = 4.25, \qquad y_{n+1} = G(y_n, y_{n-1}), \qquad G(y,z) = 108 - \frac{815 - \frac{1500}{z}}{y}.$$

   (a) Schreiben Sie in einer Programmiersprache Ihrer Wahl (oder mit einem programmierbaren Taschenrechner, oder mit einer Tabellenkalkulation, aber nicht Mathematica oder Maple) ein Programm, mit dem Sie soviele Folgenglieder bestimmen, bis Sie einen Grenzwert $\lim_{n\to\infty} y_n$ erraten können.

   (b) Beweisen Sie, daß für $n \geq 1$ gilt:

$$y_{n+1} = 8 - \frac{15}{y_n}.$$

   Schreiben Sie wieder ein Computerprogramm, das diese Rekursion implementiert, und bestimmen Sie soviele Folgenglieder, bis Sie einen Grenzwert $\lim_{n\to\infty} y_n$ erraten können.

   (c) Beweisen Sie, daß für $n \geq 1$ gilt:

$$y_n = \frac{3^n + 5^n}{3^{n-1} + 5^{n-1}},$$

   und bestimmen Sie (nun allerdings im Kopf) den Grenzwert $\lim_{n\to\infty} y_n$.

2. Erklären Sie Ihre Beobachtungen aus Aufgabe 1.

   Hinweis: Ansatz $y_n = x_{n+1}/x_n$. Rekursionsformel für x_n. Ansatz $x_n = \alpha^n$. Benutzen Sie Ihre Kenntnisse über Homomorphismen.

3. Mittels geeigneter TAYLOR–Entwicklungen zeige man, daß

$$x < \tan(x) < \frac{x}{1-x}, \qquad \text{für} \quad 0 < x < \frac{\pi}{12}.$$

4. Sei $g = g(x) = x - \frac{1}{2}e^{-x}$, für $0 \leq x \leq 1$.

   (a) Man zeige, daß g genau eine Nullstelle ξ hat im Intervall $[0,1]$.

   (b) Man begründe, daß das NEWTON–Verfahren für den Startwert $x_0 = 0$ konvergiert, und zwar monoton steigend gegen ξ.
   Hinweis: schauen Sie nach, ob die Funktion f konvex oder konkav oder sonstwie ist.

   (c) Berechnen Sie mindestens 5 Glieder der Näherungsfolge des Newtonverfahrens.

   (d) Man zeige, daß die Iterationsvorschrift $x_{n+1} = \frac{1}{2}e^{-x_n}$ für jeden beliebigen Startwert $x_0 \in [0,1]$ gegen diese Nullstelle konvergiert, und gebe eine Abschätzung für den Fehler $|x_8 - \xi|$ an.

Aufgabe zum Differenzierenüben

5. Die Wellenfunktion $\psi = \psi(t, x)$ eines einzelnen Elektrons ist eine komplexwertige Funktion von Zeit und Ort, die der folgenden Differentialgleichung genügt:

$$\mathrm{i}\varepsilon \partial_t \psi(t, x) = -\frac{\varepsilon^2}{2} \triangle \psi(t, x) - V(t, x)\psi(t, x),$$

wobei wir den Spin des Elektrons ignorieren. Diese Gleichung heißt *Schrödingergleichung*.

Hierbei ist $\mathrm{i}^2 = -1$, die reelle Konstante ε enthält das Plancksche Wirkungsquantum h und die Elektronenmasse m, und $V = V(t, x)$ ist ein reellwertiges Potential. Der Laplace-Operator $\triangle$ wirkt nur auf $x \in \mathbb{R}^3$.

Wir setzen

$$\psi(t, x) = \sqrt{n(t, x)} \exp\left(\frac{\mathrm{i}S(t, x)}{\varepsilon}\right),$$

wobei n und S reellwertige Funktionen sind, und $n(t, x) \geq 0$ überall.

(a) Beweisen Sie: die Funktion ψ ist eine Lösung der Schrödingergleichung genau dann, wenn n und S die beiden folgenden Differentialgleichungen erfüllen:

$$\partial_t n + \operatorname{div}(n \nabla S) = 0, \qquad \partial_t S + \frac{1}{2}|\nabla S|^2 - V - \frac{\varepsilon^2}{2} \frac{\triangle \sqrt{n}}{\sqrt{n}} = 0.$$

Hierbei wirkt der Gradient ∇ nur auf $x \in \mathbb{R}^3$.

(b) Wir führen die *Stromdichte* $J = -n\nabla S$ ein. Beweisen Sie: die Funktion ψ löst die Schrödingergleichung genau dann, wenn (n, J) die folgenden Differentialgleichungen lösen:

$$\begin{aligned} &\partial_t n - \operatorname{div} J = 0, \\ &\partial_t J - \operatorname{div}\left(\frac{J \otimes J}{n}\right) + n\nabla V + \frac{\varepsilon^2}{2} n \nabla \left(\frac{\triangle \sqrt{n}}{\sqrt{n}}\right) = 0. \end{aligned}$$

Hierbei ist $J \otimes J$ das dyadische Produkt der zwei Vektoren J („Spalte mal Zeile gleich Matrix“). Der Divergenzoperator wird auf jede Zeile dieser Matrix separat angewandt.

Diese Gleichungen heißen *quantumhydrodynamische Gleichungen bei Nulltemperatur*, wegen ihrer großen Ähnlichkeit zu den herkömmlichen hydrodynamischen Gleichungen, die das Verhalten von Fluiden beschreiben.