Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
M. Dreher 28.04.2009

Übungen zur Mathematik für Physiker II, Blatt 2

Die Lösungen sind abzugeben am Freitag, 08.05.2009, VOR Beginn der Vorlesung.

1. Ein Teilchen bewegt sich im Raum und hat zum Zeitpunkt t im gewöhnlichen kartesischen Koordinatensystem die Position $(x(t), y(t), z(t))$. Die kinetische Energie wird gegeben durch
$$T = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2).$$
Nun führen wir Kugelkoordinaten (r, θ, φ) gemäß $x = r\sin\theta\cos\varphi$, $y = r\sin\theta\sin\varphi$, $z = r\cos\theta$ ein, wobei $0 \leq r < \infty$, $0 \leq \theta \leq \pi$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$.
   (a) Man drücke $\dot{x}$, $\dot{y}$ und $\dot{z}$ durch r, φ, θ, $\dot{r}$, $\dot{\varphi}$, $\dot{\theta}$ aus.
   (b) Man berechne die kinetische Energie in Kugelkoordinaten.

2. Die Ableitung f' einer Funktion f an einer Stelle x_0 kann mit Hilfe des *Vorwärts-Differenzenquotienten* bzw. des *zentralen Differenzenquotienten* näherungsweise berechnet werden:
$$f'(x_0) \approx \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}, \qquad f'(x_0) \approx \frac{f(x_0+h) - f(x_0-h)}{2h}.$$
   (a) Schreiben Sie ein Computerprogramm, das genau dies tut (irgendeine Programmiersprache oder Matlab, oder ein programmierbarer Taschenrechner, oder eine Tabellenkalkulation, aber nicht Mathematica oder Maple). Die Funktion sei $f = f(x) = x^2$, der Punkt sei $x_0 = 2.5$, und als Schrittweise sei $h = 10^{-k}$ zu wählen, und zwar für jeden der Werte $k = 1, 2, \dots, 39, 40$. Vergleichen Sie mit dem echten Wert $f'(x_0) = 5$.
   (b) Warum sind zu große h schlecht ?
   (c) Warum sind zu kleine h schlecht ?
   (d) Geben Sie eine mathematisch überzeugende Begründung an, warum der zentrale Differenzenquotient einen besseren optimalen Näherungswert liefert als der Vorwärts-Differenzenquotient.

3. Sei $u = u(x, y)$ eine unendlich oft differenzierbare Funktion von $\mathbb{R}^2$ nach $\mathbb{R}$. Zeigen Sie, daß
$$\triangle u(x,y) = \frac{1}{h^2}\left(u(x+h,y) + u(x,y+h) + u(x-h,y) + u(x,y-h) - 4u(x,y)\right) + \mathcal{O}(h^?)$$
für $h \to 0$ gilt, und setzen Sie vorher für das Fragezeichen den optimalen Exponenten ein.

4. Es sei $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ die Funktion mit der Gleichung
$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2y^4}{x^4+y^8} & : (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & : (x,y) = (0,0). \end{cases}$$
   (a) Man zeige, daß im Ursprung jede Richtungsableitung existiert, und berechne deren jeweiligen Wert (Definition der Richtungsableitung mittels Limes $t \to 0$. Nicht mit dem Gradienten hantieren !).
   (b) Man zeige, daß trotzdem f im Ursprung unstetig ist.
   Hinweis: Man laufe entlang einer „Parabel“ in den Ursprung, und vergleiche die Grenzwerte der Funktionswerte entlang mehrerer „Parabeln“. Was passiert, wenn Sie entlang einer Geraden zum Ursprung laufen ?

Aufgabe zum Differenzierenüben

5. Wir betrachten die Funktion $f\colon (\mathbb{R}^3 \setminus \{\vec{0}\}) \to \mathbb{R}$ mit der Funktionsgleichung

$$f(x, y, z) = (x^2 + y^2 + z^2)^\alpha.$$

Hierbei ist $\alpha \in \mathbb{R}$ ein Parameter. Wie ist α zu bestimmen, damit $\triangle f(x, y, z) = 0$ gilt, für alle $(x, y, z) \neq \vec{0}$?

Antwort: $\alpha = -\frac{1}{2}$.

6. Lösen Sie das Anfangswertproblem

$$y''(x) + 4y'(x) + 29y(x) = 0, \qquad y(0) = 1, \qquad y'(0) = 0.$$

Antwort: $\frac{1}{5}e^{-2x}(5\cos(5x) + 2\sin(5x))$