

Übungen zur Mathematik für Physiker II, Blatt 3

Die Lösungen sind abzugeben am Freitag, 15.05.2009, VOR Beginn der Vorlesung.

1. Man bestimme den Abstand des Punktes $(x, y) = (0, 603)$ von der Hyperbel $\{(x, y): 2x^2 - y^2 = 1\}$.
2. Durch die Gleichung $f(x, y) = 0$ wird eine Funktion $y = y(x)$ in einer Umgebung von x_0 gegeben, wenn wir voraussetzen, daß $f(x_0, y_0) = 0$ und $f_y(x_0, y_0) \neq 0$. Zeigen Sie, daß für x nahe x_0 gilt:

$$y''(x) = -\frac{f_{xx}f_y^2 - 2f_{xy}f_xf_y + f_{yy}f_x^2}{f_y^3}.$$

3. Die Gleichung $\frac{1}{9}(x+y)^2 + \frac{1}{16}(x-y)^2 = 1$ beschreibt eine Ellipse in der Ebene, beziehungsweise eine implizit definierte Funktion $y = y(x)$. Man bestimme die Extrema dieser Funktion $y = y(x)$. Können Sie in einer Umgebung dieser Extrema die Ellipsengleichung nach x umstellen?
4. Aus Schwingungsdauer T und Länge l eines Fadenpendels soll ein Näherungswert für die Erdbeschleunigung g experimentell ermittelt werden. Wie pflanzen sich die relativen Fehler für T und l auf den relativen Fehler für g fort?
5. *Freiwillige Zusatzaufgabe*

Es seien E und k_B sowie E_1, \dots, E_N gegebene positive Zahlen, und gesucht seien Zahlen w_1, \dots, w_N aus dem Intervall $[0, 1]$, die die Funktion

$$S(w_1, \dots, w_N) = -k_B \sum_{r=1}^N w_r \ln w_r$$

maximieren, unter den beiden Nebenbedingungen $w_1 + \dots + w_N = 1$ und $w_1 E_1 + w_2 E_2 + \dots + w_N E_N = E$.

Rechenaufgaben zum Selberkorrigieren

6. Bestimmen Sie die Determinante von

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & a & 0 \\ 0 & a & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -b \\ 0 & b & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Antwort: $2ab$

7. Man entwickle die Funktion

$$y = f(x) = \frac{1}{(\sqrt{1-3x^3})^3}$$

in eine Taylorreihe um $x = 0$, mit 5 Termen $\neq 0$.

Antwort: $y = f(x) = 1 + \frac{9x^3}{2} + \frac{135x^6}{8} + \frac{945x^9}{16} + \frac{25515x^{12}}{128} + \mathcal{O}(x^{13})$.

Wenn Sie die richtige Formel im Skript finden, ist es ganz einfach.

8. Mit Hilfe des Newtonverfahrens suche man eine Nullstelle der Funktion $y = f(x) = x - \frac{1}{4}e^{-x}$.

Antwort: $x = 0.203888 \dots$