

## Übungen zur Mathematik für Physiker II, Blatt 4

Die Lösungen sind abzugeben am Freitag, 22.05.2009, VOR Beginn der Vorlesung.

1. Mit dem Verfahren der „Extremwertsuche unter Nebenbedingungen“ suche man das flächengrößte Dreieck in einem gegebenen Kreis.

Erfreuen Sie Ihren Korrektor mit einer eleganten Lösung. Stumpfsinniges Rechnen kann ja jeder.

2. Zeigen Sie, daß für reelle Zahlen  $a_1, \dots, a_n$  gilt:

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & \dots & a_n \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 & a_4^2 & \dots & a_n^2 \\ a_1^3 & a_2^3 & a_3^3 & a_4^3 & \dots & a_n^3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & a_3^{n-1} & a_4^{n-1} & \dots & a_n^{n-1} \end{pmatrix} = \prod_{k>j} (a_k - a_j).$$

*Hinweis:* keine Monsterrechnungen. Besser:  $a_n$  als Variable  $x$  lesen. Polynom in  $x$  finden. Polynomgrad, Nullstellen und Absolutglied suchen (wofür brauchen Sie das Absolutglied?). Induktion.

3. Berechnen Sie die Determinante der Matrix

$$\begin{pmatrix} x & 0 & 0 & \dots & 0 & a_0 \\ -1 & x & 0 & \dots & 0 & a_1 \\ 0 & -1 & x & \dots & 0 & a_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & -1 & x & a_{n-2} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & -1 & x + a_{n-1} \end{pmatrix}.$$

4. Seien  $x_1, \dots, x_{n-1} \in \mathbb{R}^n$  gegeben. Wir wählen einen weiteren Vektor  $x' \in \mathbb{R}^n$  völlig beliebig, und stellen diese  $n$  Vektoren zu einer  $n \times n$ -Matrix  $A$  zusammen:  $A = (x_1, \dots, x_{n-1}, x')$ . Dann definieren wir einen weiteren Vektor

$$y = (D_{1n}(A), \dots, D_{nn}(A))^T.$$

Zeigen Sie, daß  $y$  auf jedem Vektor  $x_j$  senkrecht steht. Woher kennen Sie das ?

*Hinweis:* lesen Sie  $\langle y, x_j \rangle$  als Determinante.

5. *Freiwillige Zusatzaufgabe*

Bestimmen Sie mittels der Formel aus der Vorlesung die inverse Matrix zu

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix},$$

und vergleichen Sie Ihr Ergebnis mit dem Ergebnis von Mathematica/Maple/Matlab.

## Rechenaufgaben zum Selberkorrigieren

- Bestimmen Sie die inverse Matrix zu einer  $2 \times 2$  Drehmatrix mit Hilfe der expliziten Formel für die inverse Matrix aus dem Skript.