Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
M. Dreher

22.05.2009

Übungen zur Mathematik für Physiker II, Blatt 5

Die Lösungen sind abzugeben am Freitag, 29.05.2009, VOR Beginn der Vorlesung.

1. Die Funktion f sei stetig auf $\mathbb{R}$. Man zeige, daß dann für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt:

$$\int_{t=0}^{x} f(t)(x-t)\,\mathrm{d}t = \int_{u=0}^{x} \left(\int_{t=0}^{u} f(t)\,\mathrm{d}t \right) \mathrm{d}u.$$

   Werten Sie nach diesem Schema die Integrale $\int_{t=0}^{x} f(t)(x-t)^2\,\mathrm{d}t$ und $\int_{t=0}^{x} f(t)(x-t)^3\,\mathrm{d}t$ aus.

   Hinweis: stumpfsinniges Ausmultiplizieren zerstört den Lernzweck und erschwert das Finden des Lösungswegs. Es ist am Besten, die Klammern so lange wie möglich stehen zu lassen.

2. Man bestimme die folgenden unbestimmten Integrale:

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x^3(x-1)}, \qquad \int \frac{\mathrm{d}x}{1+\sin x},$$

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\cos x \sin^3 x}, \qquad \int x \arctan x\,\mathrm{d}x,$$

$$\int \frac{\cos(3x)}{e^{2x}}\,\mathrm{d}x.$$

3. Das Legendre–Polynom $P_n = P_n(x)$ ist eine Lösung y der Legendre–Differentialgleichung $(1-x^2)y''(x) - 2xy'(x) + n(n+1)y(x) = 0$. Analog P_m. Zeigen Sie, daß P_n und P_m im $L^2(-1,1)$ aufeinander senkrecht stehen, also

$$\int_{x=-1}^{1} P_n(x)P_m(x)\,\mathrm{d}x = 0, \qquad m \neq n, \qquad m, n \in \mathbb{N}_+.$$

   Hinweis: mehrfache partielle Integration. Es könnte die Rechnung verkürzen, die Legendre–Differentialgleichungen in „selbstadjungierte Form“ zu bringen: $(q(x)y'(x))' + r(x)y(x) = 0$, mit passend zu suchenden Funktionen q und r.

4. Zeigen Sie, daß das Tschebyscheff–Polynom $T_n(x) = \cos(n \arccos x)$ die folgende Differentialgleichung löst:

$$(1-x^2)y'' - xy' + n^2 y = 0.$$

   Beweisen Sie (mit passenden Methoden), daß die Tschebyscheff–Polynome auf dem Intervall $(-1,1)$ mit der Gewichtsfunktion $(1-x^2)^{-1/2}$ orthogonal aufeinander stehen, also

$$\int_{x=-1}^{1} T_n(x)T_m(x)\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x = 0, \qquad n \neq m, \qquad n, m \in \mathbb{N}_+.$$

5. *Freiwillige Zusatzaufgabe*

   Man knacke das Integral $\int x^2\sqrt{a^2-x^2}\,\mathrm{d}x$ mit der Substitution $x = a\cos\theta$.

   Das Endergebnis darf kein θ mehr enthalten.