Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
M. Dreher

29.05.2009

Übungen zur Mathematik für Physiker II, Blatt 6

Die Lösungen sind abzugeben am Freitag, 05.06.2009, VOR Beginn der Vorlesung.

1. Die EULERsche Gammafunktion spielt eine wichtige Rolle in der mathematischen Physik und wird für $x > 0$ durch $\Gamma(x) = \int_{t=0}^{\infty} e^{-t} t^{x-1}\,\mathrm{d}t$ erklärt.
   (a) Man begründe, daß dieses Integral für jedes $x > 0$ existiert.
   (b) Man berechne $\Gamma(1)$, $\Gamma(2)$, $\dots$, $\Gamma(n)$, $\dots$. *Hinweis:* partielle Integration
   (c) Man bestimme $\lim_{x\to+0}\Gamma(x)$.
   Hinweis: Man untersuche dabei $\int_{t=0}^{1} \dots\,\mathrm{d}t$ und $\int_{t=1}^{\infty} \dots\,\mathrm{d}t$ getrennt.

2. Es sei $F_n(x) = n^2 x(1-x^2)^n$, für $0 \le x \le 1$ und $n \in \mathbb{N}$. Man berechne

$$\lim_{n\to\infty} F_n(x), \qquad \lim_{n\to\infty}\int_0^1 F_n(x)\,\mathrm{d}x, \qquad \int_0^1 \lim_{n\to\infty} F_n(x)\,\mathrm{d}x.$$

   Man skizziere einige Graphen der Funktionen $F_n = F_n(x)$. Wie ändern sich die Graphen für $n \to \infty$?

3. Man bestimme das unbestimmte Integral

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{1+x^4}.$$

4. Man suche die Stammfunktionen:

$$\int e^x \cosh(x)\,\mathrm{d}x, \qquad \int \frac{x^3}{\sqrt{1+x^4}}\,\mathrm{d}x, \qquad \int \frac{(\ln x)\cdot\ln(\ln x)}{x}\,\mathrm{d}x,$$

   und beschreibe, wo es diese gibt.

5. *Freiwillige Zusatzaufgabe*

   Man ermittle die Werte der bestimmten Integrale (falls sie existieren):
   (a) $\int_{x=e}^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x(\ln x)^t}, \quad t > 1,$
   (b) $\int_{x=0}^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+1)(x^2+5^2)}.$

Rechenaufgabe zum Selberkorrigieren

6. Zeigen Sie, daß für alle $a, b > 0$ gilt

$$\frac{1}{ab} = \int_0^1 \frac{1}{(ax - bx + b)^2} \, \mathrm{d}x.$$

Hinweis: Fallunterscheidung $a = b$, $a \neq b$ und Substitution.