Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
M. Dreher

02.06.2009

Übungen zur Mathematik für Physiker II, Blatt 7

Die Lösungen sind abzugeben am Freitag, 12.06.2009, VOR Beginn der Vorlesung.

Unter einer glatten positiven Funktion wollen wir eine reellwertige Funktion auf dem Intervall $\Omega = [0, 1]$ verstehen, die unendlich oft differenzierbar ist und nur positive Werte annimmt. Wenn $u = u(x)$ eine Funktion ist, dann sei $\partial_x u = u_x$ die erste Ableitung, und $\partial_x^2 u = u_{xx}$ die zweite Ableitung. Analog für andere Ableitungen.

1. Sei $\varrho = \varrho(x)$ eine glatte positive Funktion mit $\varrho'(x) = 0$ für $x = 0$ und $x = 1$. Man zeige, daß dann gilt:
$$\int_\Omega \varrho^2 \Big((\ln \varrho^2)_{xx}\Big)^2 \,\mathrm{d}x = 2\int_\Omega \frac{\varrho_{xx}}{\varrho}\Big(\varrho^2\Big)_{xx} \mathrm{d}x = 4\int_\Omega (\varrho_{xx})^2 \,\mathrm{d}x + \frac{64}{3}\int_\Omega \Big(\partial_x\sqrt{\varrho}\Big)^4 \mathrm{d}x,$$
$$\int_\Omega \Big((\ln \varrho)_{xx}\Big)^2 \mathrm{d}x = -\int_\Omega \left(\frac{\varrho_{xx}}{\varrho}\right)_x \frac{\varrho_x}{\varrho}\,\mathrm{d}x.$$

2. Sei Ω das Gebiet eines Halbleiters, und sei $n = n(t, x)$ die Dichte der beweglichen Elektronen in Ω. Weiterhin sei $C = C(x)$ die Dichte der dotierten positiv geladenen Ionen. Dann entsteht ein elektrisches Feld mit Potential V, für das gilt:
$$\lambda^2 V_{xx}(t, x) = n(t, x) - C(x),$$
wobei λ die (skalierte) Debye–Länge bezeichnet. Weiterhin sei $P = P(n)$ der Druck, gegeben durch die Formel $P(n) = \theta n$, und θ ist die Kristallgittertemperatur. Die Enthalpie $h = h(n)$ wird dann beschrieben durch $h'(n) = P'(n)/n$. Das Quasi–Fermi–Niveau F lautet
$$F(t, x) := -\varepsilon^2 \frac{\partial_x^2\sqrt{n}}{\sqrt{n}} + h(n) - V,$$
und ε ist die (skalierte) Planck–Konstante. Die Quanten–Drift–Diffusionsgleichung ist dann
$$n_t(t, x) = \Big(n(t, x)F_x(t, x)\Big)_x,$$
und die Randbedingungen auf dem Rand $\partial\Omega = \{0, 1\}$ von Ω seien:
$$n_x = 0, \qquad F_x = 0, \qquad V_x = 0.$$
Schließlich definieren wir die (Pseudo–)Entropien
$$E_1(n) = \int_\Omega \Big(n \ln n - n + 3\Big)\,\mathrm{d}x, \quad E_2(n) = \int_\Omega \Big(n - \ln n\Big)\,\mathrm{d}x, \quad E_3(n) = \int_\Omega \Big(\partial_x\sqrt{n}\Big)^2 \mathrm{d}x.$$
Wir setzen immer voraus, daß $x \mapsto n(t, x)$ für alle t eine glatte positive Funktion ist.
   (a) Man berechne die Werte von $\partial_x\sqrt{n}$, $\partial_x^3 n$, $\partial_x^3\sqrt{n}$ auf dem Rand. Was können Sie über die Randwerte von $\partial_x^2\sqrt{n}$ aussagen ?

(b) Zeigen Sie, daß

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\varepsilon^2 E_3(n) + \theta E_1(n) + \frac{\lambda^2}{2}\int_\Omega |V_x|^2\,\mathrm{d}x\right) + \int_\Omega n|F_x|^2\,\mathrm{d}x = 0$$

und geben Sie eine physikalische Interpretation. Was bedeutet das für das Langzeitverhalten von $n = n(t,x)$ (also für große t) ?

(c) Was können Sie über die Funktion $t \mapsto \int_\Omega n(t,x)\,\mathrm{d}x$ aussagen ? Was bedeutet diese Funktion ?

3. Die Derrida–Lebowitz–Speer–Spohn–Gleichung beschreibt Grenzflächenfluktuationen in einem zwei-dimensionalen Spin-System und lautet

$$n_t + \Big(n(\ln n)_{xx}\Big)_{xx} = 0, \qquad (t,x) \in (0,\infty)\times\Omega,$$

und die Randbedingungen seien

$$n_x = n_{xxx} = 0.$$

Zeigen Sie die Identitäten

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}E_1(n) + \int_\Omega n\,|(\ln n)_{xx}|^2\,\mathrm{d}x &= 0,\\
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}E_2(n) + \int_\Omega |(\ln n)_{xx}|^2\,\mathrm{d}x &= 0,\\
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}E_3(n) + 2\int_\Omega \left|\sqrt{n}\left(\frac{(\sqrt{n})_{xx}}{\sqrt{n}}\right)_x\right|^2\,\mathrm{d}x &= 0,
\end{aligned}$$

und machen Sie sich daraus ergebende Aussagen über die Langzeitasymptotik von n.