Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
M. Dreher

12.06.2009

Übungen zur Mathematik für Physiker II, Blatt 8

Die Lösungen sind abzugeben am Freitag, 19.06.2009, VOR Beginn der Vorlesung.

1. Zusätzlich zu den beiden aus der Vorlesung bekannten Faltungen gibt es noch eine weitere Faltung, die in der Elektrotechnik recht populär ist: $(u*v)(t) = \int_{s=0}^{t} u(t-s)v(s)\,\mathrm{d}s$. Hierbei ist immer $t \geq 0$. Man beachte die variable obere Integrationsgrenze !
   (a) Man zeige, daß diese Faltung linear in jedem Faktor, kommutativ sowie assoziativ ist.
   (b) Sei e die Funktion, die immer den Wert eins hat. Was bedeutet dann die Formel $(e*e)*u = e*(e*u)$? Analog für $(e*e*e)*u = e*(e*(e*u))$?
   (c) Geben Sie eine Formel für die Ableitung $(u*v)'$ an, und überlegen Sie, ob die Menge aller stetigen Funktionen mit Operation $*$ eine Gruppe bzw. Halbgruppe ist.

2. Zu den (2π–periodisch auf ganz $\mathbb{R}$ ergänzten) Funktionen
$$f(x) = \begin{cases} 1 & : |x| \leq \pi/2, \\ 0 & : \pi/2 < |x| < \pi, \end{cases} \qquad g(x) = \begin{cases} \pi - 2|x| & : |x| \leq \pi/2, \\ 0 & : \pi/2 \leq |x| \leq \pi \end{cases}$$
sind die komplexen Fourierreihen gesucht. Welcher Zusammenhang scheint zwischen „Glattheit“ von f, g und „Abklingverhalten“ der Fourierkoeffizienten c_k zu bestehen ?

3. Der Klirrfaktor ist ein Maß für den Oberschwingungsanteil eines Signals. Für ein Signal $f = f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \exp(ikt)$ ist er gegeben durch
$$K(f) = \sqrt{\frac{\sum_{k\neq -1,0,1} |c_k|^2}{\sum_{k\neq 0} |c_k|^2}}.$$
Bestimmen Sie ihn für die Dreiecksschwingung, die beschrieben wird durch die 2π-periodische Funktion $f = f(t) = \pi - |t|$ für $|t| \leq \pi$. *Hinweis:* Komplexe Version der Bessel-Identität.
Was bedeutet das Abziehen der Summanden mit $k = 0, \pm 1$ in Zähler und Nenner ?

4. Die FIBONACCI–Zahlen f_n spielen eine gewisse Rolle in der Biologie und Informatik. Dies sind natürliche Zahlen, die durch $f_0 = 1$, $f_1 = 1$ und $f_{n+1} = f_n + f_{n-1}$ definiert sind. Also $(f_0, f_1, f_2, \dots) = (1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, \dots)$. Beweisen Sie die explizite Darstellung
$$f_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(g^{n+1} - (-g)^{-(n+1)} \right).$$
Hierbei ist $g = (1+\sqrt{5})/2$ der aus der Renaissance bekannte *Goldene Schnitt*.
Hinweis: Definieren Sie eine sogenannte *erzeugende Funktion* $F(z) := \sum_{k=0}^{\infty} f_k z^k$. (Ignorieren Sie für heute Konvergenzfragen). Beweisen Sie $(1 - z - z^2)F(z) = 1$ durch ausgiebigen Koeffizientenvergleich. Partialbruchzerlegung von F in zwei Brüche. Lesen Sie jeden dieser beiden Brüche als Summenformel einer geometrischen Reihe. Nochmal Koeffizientenvergleich. Fertig.

5. *Freiwillige Zusatzaufgabe*
Gegeben sei diejenige 2π–periodische Funktion f, die auf dem Intervall $[-\pi, \pi]$ durch die Gleichung $f(x) = x(\pi - |x|)$ erklärt wird. Man bestimme die Koeffizienten a_n bzw. b_n der reellen Fourierreihe[1]. Wie wirkt es sich aus, daß f eine ungerade Funktion ist ?

Die Klausur ist am Montag, 27.07., von 10:00 bis 12:00 Uhr im R512 und R611.

[1] Die Verwendung einer Integraltafel ist bei korrekter Quellenangabe OK.

Aufgabe zum Knobeln

6. Eine Funktion $f = f(x, y)\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ heißt *homogen vom Grade* $\alpha \in \mathbb{R}$, wenn

$$f(tx, ty) = t^\alpha f(x, y), \qquad (x, y) \in \mathbb{R}^2, \qquad (x, y) \neq (0, 0), \qquad t > 0.$$

Berechnen Sie für eine solche beliebige und unbekannte Funktion f den Ausdruck $x f_x(x, y) + y f_y(x, y) - \alpha f(x, y)$.

Antwort: 0