

## Übungen zur Mathematik für Physiker II, Blatt 9

Die Lösungen sind abzugeben am Freitag, 26.06.2009, VOR Beginn der Vorlesung.

1. In der Ebene seien die Punkte  $F_- = (-m, 0)$  und  $F_+ = (m, 0)$  gegeben, mit  $m > 0$ . Sei  $a > m$ . Wir definieren die Ellipse  $E$  als Menge aller Punkte  $P = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ , für die  $\|P - F_-\| + \|P - F_+\| = 2a$  ist. Man zeige, daß dann für diese Punkte die Ellipsengleichung  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  erfüllt ist, und man gebe die Beziehung zwischen  $a$ ,  $b$ ,  $m$  an. Wie können Sie ein ellipsenförmiges Blumenbeet mit einem Harkenstiel, zwei Pflöcken und einer Schnur anlegen ?

2. Zeigen Sie, daß in verschobenen Polarkoordinaten die Beziehung

$$r = r(\varphi) = \frac{p\varepsilon}{1 - \varepsilon \cos \varphi}, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi,$$

gilt, mit  $a = \frac{p\varepsilon}{1-\varepsilon^2}$  und  $b = \frac{p\varepsilon}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}$ . Drücken Sie  $p$  und  $\varepsilon$  durch  $a$  und  $b$  aus. Was passiert bei einem Kreis ?

Bestimmen Sie den Umfang der Ellipse für  $a \neq b$ .

3. Bestimmen Sie (ohne Kampfrechnen) an einem Punkt  $(x, y)$  auf der Ellipse einen Tangentenvektor  $\neq \vec{0}$  und einen Normalenvektor  $\neq \vec{0}$ . Sowohl im Endergebnis als auch in der Rechnung sollten die Variablen  $x$  und  $y$  idealerweise gleichrangig auftauchen.

Schicken Sie von  $F_-$  einen Lichtstrahl los, der an der Ellipse nach dem üblichen Reflexionsgesetz reflektiert wird. Überprüfen Sie, ob der reflektierte Strahl dann tatsächlich durch  $F_+$  geht. Welche Konsequenzen hätte das für die Akustik ?

4. Sei ein Sektor im Einheitskreis gegeben mit Flächeninhalt  $A$ . Wenn der eine Sektor-Endpunkt die Koordinaten  $(1, 0)$  hat, was sind dann die Koordinaten des anderen Sektor-Endpunkts ?

Sei die Hyperbel mit der Gleichung  $x^2 - y^2 = 1$  gegeben, und weiterhin daran ein Sektor mit Flächeninhalt  $A$ . Die Spitze des Sektors sei in  $(0, 0)$  (also wie beim Kreis), der eine Endpunkt des Sektors sei bei  $(1, 0)$ . Was sind die Koordinaten des anderen Endpunkts ?

Was bedeuten die Worte „Sinus (hyperbolicus)“ und „Cosinus (hyperbolicus)“ exakt auf deutsch ?

5. *Freiwillige Zusatzaufgabe*

Gegeben sei eine Gerade  $g$  und ein Punkt  $F$  nicht auf  $g$ . Eine Parabel wird definiert als Menge aller Punkte der Ebene durch  $F$  und  $g$ , die von  $g$  denselben Abstand haben wie von  $F$ .

Man leite daraus eine Parabelgleichung her. Man zeige (ohne Kampfrechnen), daß jeder Lichtstrahl, der senkrecht zu  $g$  verläuft, an der Parabel so reflektiert wird, daß er durch  $F$  verläuft. Was sind die Konsequenzen für Optik und Akustik ?

*Die Klausur ist am Montag, 27.07., von 10:00 bis 12:00 Uhr im R512 und R611.*

## Aufgaben zum Selberkorrigieren

6. Für welche Werte von  $a$  ist die Funktion

$$u(x, t) := \frac{1}{2a} \int_{z=x-at}^{z=x+at} h(z) dz$$

Lösung der Wellengleichung  $u_{tt} = u_{xx}$ ? Hierbei ist  $h$  eine unbekannte stetig differenzierbare Funktion.

*Antwort:*  $a = 1$ .

7. Lösen Sie das Anfangswertproblem

$$y''(x) + 4y'(x) + 20y(x) = \cos(x), \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0,$$

und vergleichen Sie Ihr Ergebnis mit dem von z.B. Mathematica.

8. Berechnen Sie die Determinante der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix},$$

und vergleichen Sie Ihr Ergebnis mit dem von z.B. Mathematica.