Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
M. Dreher

26.06.2009

Übungen zur Mathematik für Physiker II, Blatt 10

Die Lösungen sind abzugeben am Freitag, 03.07.2009, VOR Beginn der Vorlesung.

1. Es sei $\gamma\colon [t_P, t_Q] \to \mathbb{R}^2$ eine Kurve in der Ebene mit Endpunkten $P = \gamma(t_P)$ und $Q = \gamma(t_Q)$. Wir setzen voraus, daß man das Kurvenstück PQ auch beschreiben kann mittels gewöhnlichen Polarkoordinaten als $r = r(\varphi)$, wobei $\varphi_P \le \varphi \le \varphi_Q$.

   Man beweise die folgenden Formeln für den Flächeninhalt A des Flächenstücks OPQ:
   $$A = \frac{1}{2}\int_P^Q x\,\mathrm{d}y - y\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_{t_P}^{t_Q} x\dot{y} - y\dot{x}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int_{\varphi_P}^{\varphi_Q} r(\varphi)^2\,\mathrm{d}\varphi.$$

2. Gegeben seien die Matrizen
   $$A = \begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 7 & 2 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}.$$

   (a) Man bestimme von A und B die charakteristischen Polynome $\chi_A(t)$ und $\chi_B(t)$, sowie die Eigenwerte und Eigenvektoren beider Matrizen.

   (b) Die charakteristischen Polynome χ_A und χ_B haben die Gestalt $\chi(t) = \alpha_2 t^2 + \alpha_1 t + \alpha_0$, mit gewissen α_i. Bestimmen Sie $\chi_A(A)$ und $\chi_B(B)$ durch Einsetzen in das jeweilige Polynom.

   (c) Man ermittle durch Hinschauen die Eigenwerte und Eigenvektoren von $A^2 + 4A$ und $(A - 3I)^{-1}$.

3. (a) Es sei $\Gamma \subset \mathbb{C}$ ein Kreis um den Ursprung mit Radius $R > 0$. Berechnen Sie die Kurvenintegrale
   $$\int_\Gamma z^k\,\mathrm{d}z$$
   für jedes $k \in \mathbb{Z}$ (insbesondere auch für negative k).

   (b) Sei Γ der L-förmige Weg von $0 \in \mathbb{C}$ nach $1 - \mathrm{i}$. Bestimmen Sie (nach geeigneter Parametrisierung des Weges) den Wert des Integrals
   $$\int_\Gamma (2z + 3)\,\mathrm{d}z.$$
   Vergleichen Sie Ihren Wert mit demjenigen, den Sie durch (unbekümmertes und im Moment noch nicht gerechtfertigtes) Einsetzen der Integrationsgrenzen in eine erratene „Stammfunktion“ erhalten.

4. (a) Man berechne die Kurvenintegrale
   $$\int_\Gamma (x - y)\,\mathrm{d}s, \qquad \int_\Gamma \frac{y}{x^2 + y^2}\,\mathrm{d}s,$$
   wobei $\gamma = \gamma(t) = (2\sin(t), 2\cos(t))$ für $0 \le t \le \pi$.

(b) Es sei $f = f(x,y,z) = (f_1, f_2, f_3)^\top$ mit

$$f_1(x,y,z) = \frac{x}{(\sqrt{x^2+y^2+z^2})^3}, \qquad f_2(x,y,z) = \frac{y}{(\sqrt{x^2+y^2+z^2})^3},$$
$$f_3(x,y,z) = \frac{z}{(\sqrt{x^2+y^2+z^2})^3}.$$

Berechnen Sie das Kurvenintegral $\int_\Gamma f_1\,\mathrm{d}x + f_2\,\mathrm{d}y + f_3\,\mathrm{d}z$, wobei $\gamma(t) = (4\cos t, 4\sin t, 3)$ ist mit $-\pi \le t \le \pi$.

5. *Freiwillige Zusatzaufgabe*

Das Enterprise–Außenteam ist in seinem Shuttle in eine Subraum–Gravitationsanomalie geraten. Diese füllt die Menge

$$S := \left\{(x,y,z)^\top \in \mathbb{R}^3 \colon z \le f(x,y)\right\}$$

aus, wobei $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ durch $f(x,y) := x^2 + y^2 + 2$ gegeben ist. Das Shuttle befindet sich zum Zeitpunkt $t = 0$ am Punkt $(0,0,0)$, und Commander La Forge hat herausgefunden, daß sie sich mit einem Triebwerkstoß, der allerdings alle Antriebsvorräte verbraucht, befreien können. Sie werden dann durch die Anomalie auf einen Weg entlang der Kurve $\gamma\colon [0,\infty) \to \mathbb{R}^3$ mit

$$\gamma(t) := \frac{1}{10}\begin{pmatrix} t\cdot\sin(\pi t) \\ t\cdot\cos(\pi t) \\ 3t \end{pmatrix}$$

gezwungen. Bestimmen Sie die Zeit t_0, die das Shuttle braucht, um in den freien Raum außerhalb von S vorzudringen. Danach kann es nicht mehr manövrieren, sondern fliegt einfach mit seiner momentanen Geschwindigkeit in der momentanen Richtung weiter. Wie lange hat die Enterprise Zeit, das Außenteam hochzubeamen, bevor das Shuttle wieder in der Anomalie verschwindet ?

Die Klausur ist am Montag, 27.07., von 10:00 bis 12:00 Uhr im R512 und R611.