Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
M. Dreher

03.07.2009

Übungen zur Mathematik für Physiker II, Blatt 11

Die Lösungen sind abzugeben am Freitag, 10.07.2009, VOR Beginn der Vorlesung.

1. Zu der Matrix
$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 3 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$
bestimme man durch eigenhändiges Rechnen (also ohne Computer) die Potenz A^{2009}. Dabei ist folgender Weg vielleicht am einfachsten:
   (a) Man bilde die Jordansche Normalform $A = S(D+N)S^{-1}$, wobei D eine Diagonalmatrix mit Eigenwerten von A ist, und N eventuelle Einsen aus Jordankästen enthält.
   (b) Man vergewissere sich, daß $DN = ND$.
   (c) Man zeige: $A^{2009} = S(D+N)^{2009}S^{-1}$.
   (d) Berechnen Sie $(D+N)^{2009}$ mittels binomischer Formel. Wieviele Summanden tauchen in dieser binomischen Formel in Wirklichkeit auf ?

   An welcher Stelle haben Sie $DN = ND$ benutzt ?

2. Für eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ definieren wir die Euklidnorm $\|A\|_2$ als
$$\|A\|_2 = \sqrt{\lambda_{\max}(A^\top A)},$$
wobei $\lambda_{\max}(A^\top A)$ den größten reellen Eigenwert von $A^\top A$ bezeichnet.
   (a) Warum sind die Eigenwerte von $A^\top A$ alle reell und nie negativ ?
   (b) Man zeige für jedes $x \in \mathbb{R}^n$ die Ungleichung
$$\|Ax\|_2 \leq \|A\|_2 \cdot \|x\|_2 \,.$$
   Hierbei ist $\|x\|_2 := \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}$ die normale Pythagoras–Norm im $\mathbb{R}^n$.
   Hinweis: Man finde eine orthogonale Matrix G, die $A^\top A$ diagonalisiert, und führe im $\mathbb{R}^n$ geschickt ein neues Koordinatensystem ein. Dann schreibe man $\|Ax\|_2^2$ als Skalarprodukt, und schaufele in diesem alle Matrizen auf eine Seite.
   (c) Man finde einen Vektor $x^* \neq 0$, für den sogar das Gleichheitszeichen gilt, also $\|Ax^*\|_2 = \|A\|_2 \cdot \|x^*\|_2$.
   (d) Also ist $\|A\|_2$ gleich der kleinsten Zahl γ, für die die Ungleichung $\|Ax\|_2 \leq \gamma \|x\|_2$ für jedes $x \in \mathbb{R}^n$ wahr ist. Man zeige damit $\|A \cdot B\|_2 \leq \|A\|_2 \|B\|_2$ für $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$.
   Hinweis: Man schätze $\|ABx\|_2$ auf 2 Weisen nach oben ab.

   Wir dürfen also bei Produkten „Matrix · Vektor“ und „Matrix · Matrix“ die Normstriche auf jeden einzelnen Faktor ziehen, ohne etwas zu verschenken, wenn wir die Norm geschickt wählen !

3. Die Matrizen aus $\mathbb{R}^{n\times n}$ bilden mit der eben definierten Euklidnorm einen Banachraum. Wir definieren
$$\exp(A) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{A^j}{j!}.$$

(a) Man zeige (mittels 2 (d)), daß diese Reihe immer konvergiert.

(b) Was sind $\exp(0)$ und $\exp(I)$?

(c) Es sei $AB = BA$. Beweise, daß dann

$$\exp(A + B) = \exp(A) \cdot \exp(B),$$
$$\exp(-B) = (\exp(B))^{-1}.$$

4. Wir suchen den Wert des Integrals $I_n = \int_{x=0}^{1} x^n e^x \, \mathrm{d}x$ für große $n \in \mathbb{N}$.

   (a) Bestimmen Sie I_0.

   (b) Zeigen Sie, daß für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt: $0 < I_n \leq \frac{e}{n+1}$.

   (c) Finden Sie eine Rekursionsformel; also eine Gleichung, die I_n und I_{n+1} in Beziehung setzt.

   (d) Nutzen Sie eine Programmiersprache Ihrer Wahl (nicht MATHEMATICA oder MAPLE) oder einen programmierbaren Taschenrechner oder eine Tabellenkalkulation, um I_{40} und I_{41} zu bestimmen. Geben Sie diese Werte an.

   (e) Vergleichen Sie (b) und (d).

   (f) Wie können Sie I_{40} erfolgreich ermitteln, indem Sie die Rekursionsformel nicht vorwärts anwenden, sondern rückwärts ?

5. *Freiwillige Zusatzaufgabe*

   Seien A und B Matrizen vom Typ $\mathbb{R}^{n \times n}$, mit $AB = BA$. Jede der beiden Matrizen habe n paarweise verschiedene reelle Eigenwerte. Man zeige, daß dann jeder Eigenvektor von A auch ein Eigenvektor von B ist.

   Hinweis: Sei x ein Eigenvektor von B. Man betrachte BAx. Oder konsultieren Sie ein Buch zur Quantenmechanik: „Vertauschbare Operatoren haben ein gemeinsames System von Eigenvektoren“

Die Klausur ist am Montag, 27.07., von 10:00 bis 12:00 Uhr im R512 und R611.