Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
M. Dreher

10.07.2009

Übungen zur Mathematik für Physiker II, Blatt 12

Die Lösungen sind abzugeben am Freitag, 17.07.2009, VOR Beginn der Vorlesung.

1. Sei $a \in \mathbb{R}^n$ ein Spaltenvektor mit $\|a\| = 1$, und sei $A = I - 2aa^\top$.

   (a) Man entscheide, ob A symmetrisch, orthogonal, unitär, selbstadjungiert oder normal ist.

   (b) Sei $x \in \mathbb{R}^n$ ein Spaltenvektor. Man beschreibe geometrisch Ax.

   (c) Man bestimme aus der geometrischen Beschreibung des Abbildungsverhaltens die Eigenwerte und Eigenvektoren von A, sowie die Determinante von A (also ohne Kampfrechnen).

2. Bestimmen Sie Extrema und Sattelpunkte der Funktionen

$$\begin{aligned} f(x,y) &= x^2 + 4y^2 + 10x - 32y - 8xy + 10, \\ f(x,y) &= \exp(-x^2)(4x + y^2 - x^2), \\ f(x,y) &= x^4 + y^4 - 4a^2xy + 8a^4, \qquad a \neq 0. \end{aligned}$$

   Hinweis: Die Hesse–Matrix der zweiten Ableitungen ist in einem passenden Moment auf Definitheit zu untersuchen, siehe Skript, Chapter 1.

3. Man ermittle den Typ der folgenden Kurven im $\mathbb{R}^2$ bzw. Fläche im $\mathbb{R}^3$:

$$\begin{aligned} &x_1^2 - 4x_1x_2 + 2x_2^2 - \sqrt{2}x_2 = 1, \\ &x^2 - 6xy + 2y^2 + 8x - 2y + 5 = 0, \\ &x^2 + y^2 + 2z^2 - 2xz - 2yz - \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}y - \frac{1}{2}z = 0. \end{aligned}$$

4. Berechnen Sie das Volumen desjenigen Körpers, der begrenzt wird durch die Flächen $x^2 + y^2 = R^2$ und $x^2 + z^2 = R^2$ (Durchschnitt zweier Zylinder).

5. *Freiwillige Zusatzaufgabe*

   Seien A und B Matrizen aus dem $\mathbb{R}^{n\times n}$. Beweisen oder widerlegen Sie (mit Gegenbeispiel) folgende Aussagen:

   (a) Ist λ ein Eigenwert von A und μ ein Eigenwert von B, dann ist $\lambda + \mu$ ein Eigenwert von $A + B$.

   (b) Sei $b \in \mathbb{R}^n$ und U der von b aufgespannte Unterraum des $\mathbb{R}^n$. Gilt $A(\mathbb{R}^n) = U$, dann ist A ein Orthogonalprojektor.

Die Klausur ist am Montag, 27.07., von 10:00 bis 12:00 Uhr im R512 und R611.

Aufgaben zum Selberkorrigieren

6. Man bestimme die Jordan-Normalform der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 3 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Antwort: Eigenwerte $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 2$, $\lambda_4 = \lambda_5 = 3$, $\lambda_6 = 4$.

Eigenvektoren zu $\lambda = 2$: $(1,0,0,0,0,0)^T$ und $(0,1,0,1,0,0)^T$. Hauptvektor selber suchen.

Eigenvektoren zu $\lambda = 3$: $(0,0,0,1,0,0)^T$. Ein Hauptvektor fehlt, er bestimmt sich zu $(0,0,0,0,1,0)^T$.

Eigenvektor zu $\lambda = 4$: $(0,0,0,0,1,1)^T$.

Die Jordan-Normalform besitzt dann die Block-Diagonalmatrix

$$D = \operatorname{diag}\left((2), \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, (4) \right).$$