Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
M. Dreher

24.07.2009

Übungen zur Mathematik für Physiker II, Regenblatt

1. Wir definieren die (reellen oder komplexen) Folgenräume

$$l_1 = \left\{ a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \colon \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| < \infty \right\},$$
$$l_2 = \left\{ a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \colon \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 < \infty \right\},$$
$$l_\infty = \left\{ a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \colon \sup_{n\geq 0} |a_n| < \infty \right\}.$$

   (a) Addition zweier Folgen und Skalarmultiplikation einer Folge definieren wir komponentenweise. Zeigen Sie, daß auf diese Weise 3 Vektorräume entstehen.
   Hinweis: passendes Kriterium

   (b) Wir definieren drei Funktionen $\|\cdot\|_p : l_p \to \mathbb{R}$, $p = 1, 2, \infty$, gemäß

$$\|a\|_1 = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|, \qquad \|a\|_2 = \left(\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 \right)^{1/2}, \qquad \|a\|_\infty = \sup_{n\geq 0} |a_n|.$$

   Zeigen Sie, daß $\|\cdot\|_p$ eine Norm für den Vektorraum l_p ist.
   Hinweis: das einzig Knifflige ist die Dreiecksungleichung.

   (c) (*) Zeigen Sie, daß $(l_p, \|\cdot\|_p)$ für $p = 1, 2, \infty$ jeweils ein Banachraum ist.

   (d) Zeigen Sie die Beziehungen $l_1 \subset l_2 \subset l_\infty$, aber $l_1 \neq l_2 \neq l_\infty$.

2. Zu einer stetigen Funktion $f \in C([0, 2\pi])$ sei $Tf \colon [0, 2\pi] \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$(Tf)(x) = \int_{y=0}^{2\pi} \sin(x-y) f(y)\,\mathrm{d}y, \qquad x \in [0, 2\pi].$$

   (a) Zeigen Sie: die Funktion Tf ist stetig.

   (b) Zeigen Sie: $\|Tf\|_\infty \leq 2\pi \|f\|_\infty$, wobei $\|\cdot\|_\infty$ die übliche Supremumsnorm ist: $\|g\|_\infty := \sup_{0\leq x\leq 2\pi} |g(x)|$.

   (c) Beweisen Sie: die Abbildung T, die $f \in C([0, 2\pi])$ auf $Tf \in C([0, 2\pi])$ abbildet, ist stetig.
   Hinweis: den Stetigkeitsbegriff gibt es auch für Abbildungen zwischen zwei Banachräumen

   Hinweis: verwechseln Sie niemals eine Funktion mit ihrem Wert, und die Aufgabe wird einfach.

3. Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times m}$ mit Rang m, und sei $b \in \mathbb{R}^n$. Zeigen Sie:

   (a) Die Funktion $f \colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$, $f(x) := \|Ax - b\|_2^2$, nimmt ein Minimum an, in einem gewissen Punkt $x_0 \in \mathbb{R}^m$.

   (b) Dieser Punkt x_0 ist Lösung des Systems $A^\top A x_0 = A^\top b$.

   Hinweis: Anfängerpraktikum

4. Berechnen Sie die Extremwerte der Funktion $f(x,y) = x^2 + y^2$ unter der Nebenbedingung

$$g(x,y) := ax^2 + 2bxy + cy^2 - 1 \stackrel{!}{=} 0, \qquad a > 0, \quad ac - b^2 > 0.$$

Bestimmen Sie damit die Hauptachsen der Ellipse $g(x,y) = 0$.

5. Druck, Volumen und Temperatur eines Gases genügen einer Zustandsgleichung

$$f(P,V,T) = 0.$$

Wir setzen voraus, daß f in jedem Punkt (P,V,T) stetig differenzierbar ist, und daß bei jeder Lösung (P_0,V_0,T_0) der Zustandsgleichung keine der ersten partiellen Ableitungen Null wird.

(a) Begründen Sie, warum man lokal um jeden Punkt (P_0,V_0,T_0) die Zustandsgleichung nach einer jeden der drei Variablen umstellen kann; warum also Funktionen p, v, t existieren mit

$$P = p(V,T), \qquad V = v(T,P), \qquad T = t(P,V).$$

(b) Zeigen Sie:

$$\frac{\partial p}{\partial V}(V_0,T_0) = \left(\frac{\partial v}{\partial P}(T_0,P_0)\right)^{-1}.$$

(c) Zeigen Sie:

$$\frac{\partial p}{\partial V} \cdot \frac{\partial v}{\partial T} \cdot \frac{\partial t}{\partial P} = -1.$$

6. Es sei $C^1([0,1])$ der Raum derjenigen Funktionen, die auf dem Intervall $[0,1]$ einmal stetig differenzierbar sind. Für diesen Raum werden drei Normen vorgeschlagen:

$$\|f\|_a := \|f\|_\infty, \qquad \|f\|_b := \|f'\|_\infty, \qquad \|f\|_c := \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty,$$

wobei $\|\cdot\|_\infty$ die übliche Supremumsnorm darstellt.

Welcher der drei Normkandidaten ist tatsächlich eine Norm ?

7. (a) Gegeben sei ein beliebiges Dreieck ABC. Auf jeder Kante errichten wir je einen Vektor senkrecht nach außen, dessen Länge proportional zu der Länge der jeweiligen Kante ist. Man bestimme die Summe dieser 3 Vektoren.
Hinweis: Rechnen.

(b) Gegeben sei ein Tetraeder $ABCD$, also eine dreiseitige Pyramide im Raum. Diese darf beliebig unregelmäßig sein. Auf jeder der 4 Flächen errichten wir je einen Vektor, der auf der jeweiligen Fläche senkrecht steht, nach außen zeigt, und dessen Länge proportional ist zum Flächeninhalt der zugehörigen Dreiecksfläche. Man bestimme die Summe dieser 4 Vektoren.
Hinweis: Rechnen.

(c) Gegeben sei ein schiefer Quader $ABCDEFGHIJKL$ mit der sechseckigen Grundfläche $ABCDEF$, die unregelmäßig sein kann. Auf jeder der 8 Flächen errichten wir senkrechte Vektoren wie in (b). Man bestimme die Summe dieser 8 Vektoren.
Hinweis: Keinesfalls rechnen.

(d) Sei Ω ein kleines Gebiet im $\mathbb{R}^3$ mit glattem Rand und Volumen V. Man bestimme den Wert des Integrals

$$\int_{\partial\Omega} \mathrm{d}\vec{\sigma},$$

wobei $\mathrm{d}\vec{\sigma}$ das übliche vektorielle Oberflächenelement ist.
Hinweis: Diesen Integraltyp hatten wir nicht in der Vorlesung, aber das kann Sie nicht stoppen ...

(e) Sei $\varphi = \varphi(x)$ eine glatte skalare Funktion im $\mathbb{R}^3$, und x_0 ein Punkt im Innern von Ω. Zeigen Sie, daß dann

$$\int_{\partial\Omega} \varphi(x)\,\mathrm{d}\vec{\sigma} = \operatorname{grad}\varphi(x_0)\cdot V + \mathcal{O}(V\operatorname{diam}\Omega),$$

wobei $\operatorname{diam}\Omega$ der Durchmesser des kleinen Gebiets Ω ist.
Hinweis: Taylor

(f) Erfreuen Sie sich an der schönen Darstellung

$$\operatorname{grad}\varphi(x_0) \approx \frac{1}{V}\int_{\partial\Omega} \varphi(x)\,\mathrm{d}\vec{\sigma}.$$

(g) Machen Sie weiter mit

$$\begin{aligned}
\operatorname{div}\vec{f}(x_0) &\approx \frac{1}{V}\int_{\partial\Omega} \vec{f}\cdot\,\mathrm{d}\vec{\sigma},\\
\operatorname{rot}\vec{f}(x_0) &\approx -\frac{1}{V}\int_{\partial\Omega} \vec{f}\times\,\mathrm{d}\vec{\sigma}.
\end{aligned}$$