1. Ergänzungen zu kompakten Operatoren

1.1 Lemma. *Jeder kompakte Operator $A \in K(X)$ in einem Hilbertraum X kann in der Normtopologie angenähert werden durch Operatoren mit endlichdimensionalem Bild.*

Das heißt: zu jedem $\varepsilon > 0$ existieren Operatoren P_ε und R_ε aus $L(X)$, sodaß a_j, $b_j \in X$ existieren mit

$$P_\varepsilon x = \sum_{j=1}^{N_\varepsilon} \langle x, b_j \rangle \, a_j, \qquad \|R_\varepsilon\|_{L(X)} \leq \varepsilon,$$

und $A = P_\varepsilon + R_\varepsilon$.

Beweis. Sei $B_1 := \{x \in X \colon \|x\| \leq 1\}$ die abgeschlossene Einheitskugel in X. Dann ist $\overline{A(B_1)}$ kompakt in X, also existiert eine endliche Überdeckung durch Kugeln $B_\varepsilon(y_j)$ vom Radius ε, wobei $1 \leq j \leq \widetilde{N}_\varepsilon$.

Setze $M_\varepsilon := \operatorname{span}(y_1, \ldots, y_{\widetilde{N}_\varepsilon})$, und Q_ε als den Orthogonalprojektor von X auf M_ε. Definiere $P_\varepsilon := Q_\varepsilon \circ A$.

Dann haben wir, für $\|x\| \leq 1$, die Ungleichung

$$\|P_\varepsilon x - Ax\|_X = \|(Q_\varepsilon - I)(Ax)\|_X \leq \varepsilon,$$

also ist tatsächlich $R_\varepsilon := A - P_\varepsilon$ ein Operator mit Norm $\leq \varepsilon$. Schließlich hat P_ε die gewünschte Gestalt, denn es sei $(z_1, \ldots, z_{N_\varepsilon})$ eine ONB für M_ε. Dann ist

$$Q_\varepsilon y = \sum_{j=1}^{N_\varepsilon} \langle y, z_j \rangle \, z_j,$$

also auch

$$P_\varepsilon x = \sum_{j=1}^{N_\varepsilon} \langle x, A^* z_j \rangle \, z_j.$$

□

1.2 Bemerkung.

- Operatoren mit endlichdimensionalem Bild sind offensichtlich kompakt,
- wenn ein Operator A in der Normtopologie beliebig gut angenähert werden kann durch Operatoren mit endlichdimensionalem Bild, dann ist A kompakt (vgl. Hausaufgaben, Blatt 10).

1.3 Folgerung. *Wenn $A \in L(X)$ kompakt ist, dann auch A^*.*

Beweis. Für jedes $\varepsilon > 0$ finden wir P_ε und R_ε wie oben. Nun ist $A^* = P_\varepsilon^* + R_\varepsilon^*$, und $\|R_\varepsilon^*\|_{L(X)} = \|R_\varepsilon\|_{L(X)} < \varepsilon$, und P_ε^* bestimmt sich wie folgt:

$$\begin{aligned} \langle P_\varepsilon x, y\rangle &= \sum_j \langle \langle x, b_j\rangle a_j, y\rangle = \sum_j \langle x, b_j\rangle \langle a_j, y\rangle = \sum_j \langle x, \langle y, a_j\rangle b_j\rangle \\ &= \left\langle x, \sum_j \langle y, a_j\rangle b_j \right\rangle = \langle x, P_\varepsilon^* y\rangle , \end{aligned}$$

also ist $P_\varepsilon^* x = \sum_j \langle x, a_j\rangle b_j$, und demnach $\dim R(P_\varepsilon^*) < \infty$.

Nun wende man den zweiten • der vorigen Bemerkung an. □

1.4 Lemma. *Sei $K \in L(X)$ kompakt. Dann ist $\ker(I - K)$ endlichdimensional.*

Beweis. Setze $B_1 := \{x \in X \colon \|x\| \le 1\}$. Dann ist $\ker(I - K) \cap B_1$ eine abgeschlossene und beschränkte Teilmenge von X. Dies ist die Einheitskugel im Banachraum $Y := \ker(I - K)$, den wir mit der von X geerbten Norm ausstatten. Sei $(x_1, x_2, \dots)$ eine Folge in $\ker(I - K) \cap B_1$. Dann ist $x_n = Kx_n$, also konvergiert eine Teilfolge von $(x_1, x_2, \dots)$ gegen ein Element von $Y \cap B_1$. Also ist die Einheitskugel in Y kompakt. Also ist Y endlichdimensional. □

1.5 Lemma. *Sei $K \in L(X)$ kompakt. Dann ist $R(I - K)$ abgeschlossen.*

Beweis. Setze $Y := \ker(I - K)$ und $Z := Y^\perp$. Dann haben wir $X = Y \oplus Z$, und Z ist ein BR (als abgeschlossener UVR eines BR).

Wir beobachten: wenn $(I - K)z = 0$ und $z \in Z$, dann $z \in \ker(I - K) = Y = Z^\perp$ (denn Y ist abgeschlossen), also $z = 0$ wegen $Z \cap Z^\perp = \{0\}$. Also ist $I - K$, eingeschränkt auf Z, eine injektive Abbildung von Z nach X.

Nun gibt es eine positive Konstante C_0 mit folgender Eigenschaft: wenn $z \in Z$ und $\|z\| = 1$, dann ist $\|(I - K)z\| \ge C_0$. Denn sonst existieren $(z_1, z_2, \dots) \subset Z$ mit $\|z_n\| = 1$ und $\|(I - K)z_n\| \le 1/n$. Es gibt dann (wegen der Kompaktheit des Operators K) eine TF $(\widetilde{z}_1, \widetilde{z}_2, \dots) \subset (z_1, z_2, \dots)$ mit $K\widetilde{z}_j \to w^* \in Z$. Also ist $\widetilde{z}_n = (I - K)\widetilde{z}_n + K\widetilde{z}_n \to 0 + w^*$ für $n \to \infty$. Dann ist $w^* = \lim_n \widetilde{z}_n$, also $\|w^*\| = 1$, und $(I - K)w^* = (I - K)(\lim_n \widetilde{z}_n) = \lim_n (I - K)\widetilde{z}_n = 0$. Aber oben hatten wir gezeigt, daß $I - K$, eingeschränkt auf Z, injektiv ist. Widerspruch.

Also gilt, mit derselben positiven Konstante C_0: wenn $z \in Z$, dann ist $\|(I - K)z\| \ge C_0 \|z\|$.

Sei w^* ein Häufungspunkt von $R(I-K)$. Dann gibt es eine Folge $(x_1, x_2, \dots) \subset X$ mit $(I-K)x_j \to w^*$.

Wir zerlegen auf eindeutige Weise $x_j = y_j + z_j$ und finden eine Folge $(z_1, z_2, \dots) \subset Z$ mit $(I-K)z_j \to w^*$.

Dann ist $\|z_j - z_l\| \le C_0^{-1} \|(I-K)(z_j - z_l)\|$, und demnach ist $(z_1, z_2, \dots) \subset Z$ eine CF mit Grenzwert $z^* \in Z$, und folglich haben wir dann auch $w^* = \lim_j (I-K)z_j = (I-K)(\lim_j z_j) = (I-K)z^*$, also $w^* \in R(I-K)$.

Also ist $R(I-K)$ abgeschlossen. □

1.6 Lemma. *Sei $K \in L(X)$ kompakt, und $I-K$ sei injektiv. Dann ist $I-K\colon X \to X$ surjektiv.*

Beweis. Wir wählen $0 < \varepsilon < 1/2$ und finden $K = P_\varepsilon + R_\varepsilon$, wobei $P_\varepsilon x = \sum_{j=1}^N \langle x, b_j \rangle a_j$ für geeignte a_j, $b_j \in X$, und $\|R_\varepsilon\|_{L(X)} \le \varepsilon$.

Mittels Neumannscher Reihe ist dann $I - R_\varepsilon$ invertierbar, und wir haben

$$I - K = (I - R_\varepsilon) - P_\varepsilon = (I - R_\varepsilon) \circ \left(I - (I - R_\varepsilon)^{-1} P_\varepsilon\right).$$

Setze $Q_\varepsilon := (I - R_\varepsilon)^{-1} P_\varepsilon$. Dann haben wir

$$Q_\varepsilon x = (I - R_\varepsilon)^{-1} \sum_{j=1}^N \langle x, b_j \rangle a_j = \sum_{j=1}^N \langle x, b_j \rangle \left((I - R_\varepsilon)^{-1} a_j\right) = \sum_{j=1}^N \langle x, b_j \rangle \widetilde{a}_j.$$

Da nun $I-K$ injektiv ist, muß auch $I - Q_\varepsilon$ injektiv sein (als Abbildung $X \to X$). Also ist erst recht $I - Q_\varepsilon$, eingeschränkt auf $R(Q_\varepsilon)$, injektiv von $R(Q_\varepsilon)$ nach $R(Q_\varepsilon)$. Es ist aber $R(Q_\varepsilon)$ endlichdimensional. Aus Sätzen der Linearen Algebra I (Dimensionsformel für lineare Abbildungen) folgt dann, daß

$$(I - Q_\varepsilon)\big|_{R(Q_\varepsilon)} \colon R(Q_\varepsilon) \to R(Q_\varepsilon)$$

eine Bijektion ist.

Jetzt bestimmen wir $\ker(I - Q_\varepsilon^*)$. Sei $(I - Q_\varepsilon^*)x_0 = 0$. Dann ist

$$\begin{aligned}
&\langle (I - Q_\varepsilon^*)x_0, y \rangle = 0, \qquad \forall\, y \in X, \\
\iff &\langle x_0, (I - Q_\varepsilon)y \rangle = 0, \qquad \forall\, y \in X, \\
\implies &\langle x_0, (I - Q_\varepsilon)y \rangle = 0, \qquad \forall\, y \in R(Q_\varepsilon).
\end{aligned}$$

Wenn jetzt y durch ganz $R(Q_\varepsilon)$ läuft, dann läuft $(I - Q_\varepsilon)y$ auch durch ganz $R(Q_\varepsilon)$, denn $I - Q_\varepsilon$ ist eine Bijektion $R(Q_\varepsilon) \to R(Q_\varepsilon)$. Also ist $x_0 \perp R(Q_\varepsilon)$. Dann ist

$$0 = \langle x_0, (I - Q_\varepsilon)x_0 \rangle = \langle x_0, x_0 \rangle - \langle x_0, Q_\varepsilon x_0 \rangle = \langle x_0, x_0 \rangle - 0,$$

und daraus folgt dann $x_0 = 0$. Also ist $\ker(I - Q_\varepsilon^*) = \{0\}$, wenn man $I - Q_\varepsilon^*$ als Abbildung $X \to X$ betrachtet.

Weiterhin ist $R(I - Q_\varepsilon) = \overline{R(I - Q_\varepsilon)} = (\ker(I - Q_\varepsilon^*))^\perp = \{0\}^\perp = X$, und somit ist $I - Q_\varepsilon \colon X \to X$ surjektiv.

Damit haben wir $I - K = (I - R_\varepsilon) \circ (I - Q_\varepsilon)$ nachgewiesen als Komposition zweier bijektiver Abbildungen, also ist auch $I - K$ bijektiv. $\square$